

苏宏业　褚　健
鲁仁全　嵇小辅　著

不确定时滞系统的鲁棒控制理论



(TP-3538.0101)

不确定时滞系统的鲁棒控制理论

科学出版社

电　话：010-64000249

E-mail：gcjs@mail.sciencep.com

ISBN 978-7-03-019266-0



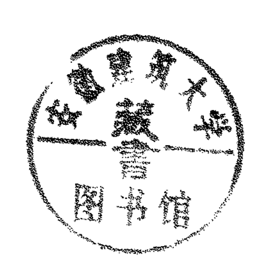
销售分类建议：自动化-控制理论

定 价：48.00 元

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

不确定时滞系统的鲁棒控制理论

苏宏业　褚　健　鲁仁全　嵇小辅　著



科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书在作者多年研究的基础上，深入浅出地阐述了不确定时滞系统的鲁棒控制理论的最新研究成果。针对不确定线性时滞系统、不确定非线性时滞系统以及不确定奇异时滞系统，采用 Lyapunov-Razumikhin 稳定性理论、Barbalat 引理以及凸优化等理论，以线性矩阵不等式、Riccati 方程作为研究工具，探讨了鲁棒稳定性、鲁棒控制器以及滑模变结构控制器的设计问题。

全书共有 9 章，主要内容有：不确定时滞线性系统的时滞独立与时滞依赖的鲁棒控制、执行器具有饱和特性的鲁棒控制、滑模变结构鲁棒控制以及具有非线性特性的不确定 Lur'e 系统、不确定 Lur'e 奇异系统的鲁棒控制等。本书注重研究方法的科学合理性，在内容上重点突出，相互衔接，避免了结果的雷同；结构上以线性系统的鲁棒控制研究到非线性系统的鲁棒控制研究为主线，结构合理，体系完备。

本书可作为控制理论与控制工程专业博士生、硕士生的教材，也可作为力学、应用数学、工程科学及与之相关的工程应用领域的教学与科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

不确定时滞系统的鲁棒控制理论/苏宏业等著. —北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-019266-0

I. 不… II. 苏… III. 不确定系统：时滞系统—鲁棒控制—理论研究 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 095791 号

责任编辑：姚庆爽 潘继敏/责任校对：朱光光
责任印制：刘士平/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷
排版制作：科学出版社编务公司
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 7 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2007 年 7 月第一次印刷 印张：18
印数：1—2 500 字数：362 000

定价：48.00 元

序

在长期的控制工程实践中，人们早已从实际与理论两方面深刻地认识到，在设计控制系统时，基于系统的精确模型是不现实的。由于种种原因，要得到系统和外界干扰的精确数学模型也是不可能的。系统的不确定性是普遍存在的，比如控制对象的模型化误差和未知参数，以及传感器噪声和外部扰动等。因此，控制系统的设计与实现，必须考虑这样一个问题，即在存在未知不确定性的情况下，反馈控制器是否仍然能够使控制系统稳定并满足所希望的性能要求。随着对不确定性问题越来越深刻的认识和研究，就导致了专门分析和处理具有不确定性系统的控制理论——鲁棒控制理论的产生。

虽然鲁棒控制的思想可以追溯到 20 世纪上半叶 Black、Nyquist、Bode 等的工作，但早期的研究往往只限于微摄动的不确定性，即敏感性分析。这也是一种无穷小分析思想，与工程实际相距较远。鲁棒控制这一术语首次被提出是在 1972 年[①]。首次在期刊论文标题中出现是 1974 年[②]。通常意义下，鲁棒控制就是要试图描述被控对象模型的不确定性，并估计在某些特定界限下达到控制目标所留有的自由度。70 年代末和 80 年代初，人们从实际与理论两方面越来越深刻地认识到鲁棒控制具有的特殊实践意义和理论意义，因而鲁棒控制一直是一个非常活跃且具有挑战性的研究领域。经历了众多学者二十多年的努力，鲁棒控制理论得到了长足的发展，并取得了令人瞩目的成果，逐渐形成了相对完整的理论体系。在现代鲁棒控制研究领域中受到广泛重视的有 Kharitonov 区间理论[③]、H_∞ 控制理论[④]、结构奇异值理论(又简称μ 理论)[⑤]等。

近年来，对于不确定时滞系统的鲁棒控制研究成果也层出不穷。《不确定时滞系统的鲁棒控制理论》一书的作者在吸收前人有益成果的基础之上，从 20 世纪 90 年代初期开始关注不确定时滞系统的鲁棒控制问题的研究，通过多年的探索与

---

① Davision E J.1972. The output control of linear time invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbance. IEEE Tarns. Automat. Contr., 17: 621-629.

② Pearson J B, Staats P W. 1974. Robust controllers for linear regulators. IEEE Trans. Automat. Contr., 19: 231-234.

③ Kharitonov V L. 1978. Asymptotic stability of an equlibrium position of a family of systems of linear differential equations. Differentsialjnie Uravnenija, 14: 2086-2088.

④ Zames G. 1981. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. IEEE Trans. Automat, Contr., 26(2):301-320.

⑤ Doyel J C. 1982. Analysis of control systems with structured uncertainty. IEE Proc. Part D., 129: 242-250.

积累，逐渐形成了有自己特色的理论研究体系，在国内外主要学术期刊上发表了一系列的学术论文，获得了国家自然科学基金重点项目，国家杰出青年基金以及其他的国家重大、重点项目的资助，取得了一定的研究成果。

该书针对不确定时滞系统的鲁棒控制问题，从不确定系统的鲁棒控制基本理论入手，由浅入深、由易到难，系统地阐述了不确定时滞线性系统的时滞独立与时滞依赖的鲁棒控制问题、执行器具有饱和特性的鲁棒控制问题、滑模变结构鲁棒控制问题以及具有非线性特性的不确定 Lur'e 系统、不确定 Lur'e 奇异系统的鲁棒控制问题等。该书的主要内容来源于作者多年研究积累，部分内容是原创性的研究成果。该书注重研究方法的科学合理性，在内容上重点突出，相互衔接，避免了结果的雷同；结构上以线性系统的鲁棒控制研究到非线性系统的鲁棒控制研究为主线，结构合理，体系完备。写作上循序渐进，深入浅出，层次分明。

该书不仅可以作为控制理论与控制工程专业博士生、硕士生的教材，供力学、应用数学、工程科学及与之相关的工程应用领域的教学与科研人员阅读，也可作为相关专业研究生的一本较好的教科书或教学参考书。我相信该书的出版必将在推动不确定时滞系统控制理论与技术的发展进程中起到积极的作用。

中国工程院院士

孙优贤

2006 年 11 月 23 日

于浙江大学控制系

前　言

实际工程问题中总是包含不确定的非最小相位对象，总是不可避免地存在由未建模动态产生的通常在高频下不可忽略的不确定性，总是有敏感元件的噪声、外界干扰以及输入信号的限制。这些都会影响反馈控制系统达到预期的效果。正是基于这一原因，在控制系统设计过程的系统模型建立和控制器设计过程中，考虑到这种不确定性的影响对于在工程实际应用中是否可行就显得尤为重要了；另外，在工程实际中，许多实际的系统都含有时滞，如涡轮喷气式飞机、微波振荡器、核反应堆、轮船定向仪、化工系统、无损耗传输系统等。通常时滞是系统产生振荡和不稳定的根源。控制系统中存在时滞使得理论分析和工程应用增加了特殊的难度，同无时滞系统相比，滞后使系统的相应性能变差，甚至稳定性难以保证，如何将解决线性不确定系统的鲁棒控制技术应用于时滞系统便成为一个十分迫切的问题。综上所述，不确定时滞系统的鲁棒控制研究也就成为研究者所关注的主要问题之一。

本书在作者多年研究的基础上，针对不确定时滞系统的鲁棒控制问题，从不确定系统的鲁棒控制基本理论入手，由简入深，由易到难，系统地阐述了不确定时滞线性系统的时滞独立与时滞依赖的鲁棒控制问题、执行器具有饱和特性的鲁棒控制问题、滑模变结构鲁棒控制问题，以及一类具有非线性特性的不确定 Lur’e 系统、不确定 Lur’e 奇异系统的鲁棒控制问题。本书的主要内容来源于作者多年研究的积累，部分内容是原创性的研究成果，针对鲁棒控制理论领域多个问题的研究，逐渐形成了具有鲜明特点的研究体系。本书的完成，对于刚进入此领域研究的研究人员及工程技术人员具有很好的理论与应用参考价值。

本书共分 9 章。第 1 章是绪论。考虑到今后章节需要应用矩阵不等式理论、稳定性理论以及不确定性的数学描述，故将以上内容作为第 2 章，作为数学基础。第 3~5 章，主要针对具有范数有界不确定性、匹配不确定性、秩 1 型不确定性以及凸最优不确定性的线性时滞连续及离散系统，给出了时滞独立型以及时滞相关型的鲁棒稳定、鲁棒二次镇定、保成本控制以及鲁棒控制的一些结论和方法。第 6 章，主要针对具有幅值饱和执行器约束和扇形饱和执行器约束的时变不确定时滞系统，给出了基于线性矩阵不等式的低保守性的鲁棒稳定及鲁棒二次镇定的充分条件。第 7 章，主要针对具有匹配不确定性以及非匹配不确定性的时滞系统，给出了滑模动态模型渐近稳定性的充分必要条件以及滑模控制器的设计方法。第 8、9 章，主要针对具有非线性特性的不确定 Lur’e 系统、不确定 Lur’e 奇异系统，

给出了系统绝对稳定性、绝对二次镇定的新方法，以及鲁棒 H_∞ 控制器、可靠控制器的设计方法。

在本书选题、编写过程中得到了中国自动化学会电气自动化专业委员会、科学出版社以及浙江大学先进控制研究所的大力支持和帮助，作者在此表示由衷的感谢。另外作者的历届博士研究生嵇小辅、项基、王景成、刘飞、蒋培刚、高金凤、李晓波、庄开宇、张克勤等参加了部分研究工作，提供了部分资料和数据，丰富了本书内容，作者在此一并致谢。

由于作者水平有限，书中的疏漏在所难免，殷切希望广大读者批评指正。

苏宏业

浙江大学先进控制研究所

摘　要

本书在作者多年研究的基础上，深入浅出地阐述了不确定时滞系统的鲁棒控制理论的最新研究成果。针对不确定线性时滞系统、不确定非线性时滞系统以及不确定奇异时滞系统，采用 Lyapunov-Razumikhin 稳定性理论、Barbalat 引理以及凸优化等理论，以线性矩阵不等式、Riccati 方程作为研究工具，探讨了鲁棒稳定性、鲁棒控制器以及滑模变结构控制器的设计问题。主要研究内容包括如下几个方面：

(1) 针对具有范数有界不确定性、匹配不确定性、秩1型不确定性以及凸最优不确定性的线性时滞连续及离散系统，提出了分别基于 Riccati 方程、线性矩阵不等式的时滞独立型以及时滞相关型的鲁棒稳定性判据、鲁棒二次镇定、保成本控制以及鲁棒 H_2/H_∞ 控制的理论和方法。

(2) 针对具有幅值饱和执行器约束和扇形饱和执行器约束的时变不确定时滞系统，采用不变集理论和 Lyapunov-Razumikhin 稳定性理论，研究了基于线性矩阵不等式的鲁棒稳定及鲁棒二次镇定问题，并在保守性方面，与前人的研究成果相比有较大的改进。

(3) 针对具有匹配不确定性以及非匹配不确定性的时滞系统，通过分别设计时滞无关和时滞依赖的滑模面，基于变结构控制理论，提出了滑模动态模型渐近稳定的充分必要条件以及滑模控制器的设计方法。

(4) 针对一类具有有限 Hurwitz 扇形角域与无限 Hurwitz 扇形角域的非线性时滞系统，提出了低保守性的鲁棒绝对稳定性及绝对二次镇定的新方法，并研究了基于线性矩阵不等式的输出反馈控制器、H_∞控制器以及可靠控制器的设计方法。

(5) 针对一类不确定 Lur'e 奇异时滞系统，通过 Barbalat 引理，提出了闭环系统具有正则性、无摄动性和稳定性的充分条件以及鲁棒 H_∞状态反馈控制器的设计方法；并且针对一类具有常规饱和特性的不确定 Lur'e 时滞奇异系统，基于 Lyapunov-Krasovskii 方法和 S 过程，提出了保证闭环系统局部渐近稳定的鲁棒二次镇定控制器的设计方法。

目　录

第1章 绪　论

1.1 引　言

控制理论是研究被控对象状态的运动规律，其基础是反馈控制。反馈控制的主要目的是：

(1) 稳定被控对象；

(2) 改善被控对象的时间响应；

(3) 降低扰动对系统稳定性的影响，进一步，在系统稳定的前提条件下，降低扰动对系统性能的影响；

(4) 当被控对象不确定或变化时，仍能在稳定的状态下运行(稳定鲁棒性)，进一步，在系统稳定的前提条件下，当被控对象不确定或变化时，仍能在一定性能指标要求下运行(性能鲁棒性)。

通常情况下，设计一个控制系统包括很多步骤，典型步骤如下：

(1) 研究被控系统，决定采用哪种敏感元件和执行机构以及它们放置的位置；

(2) 建立所得到的被控系统的模型；

(3) 如果需要，简化模型以便于处理；

(4) 分析得到的系统模型，确定它的性质；

(5) 确定性能指标；

(6) 确定所采用的控制器的类型；

(7) 如果可能，设计控制器以满足性能指标；否则，修改性能指标或拓宽欲寻找的控制器的类型；

(8) 在计算机上或在实验模型上仿真被控系统；

(9) 如果有必要从第一步开始重复；

(10) 选择硬件和软件并实现控制器；

(11) 如果需要，在线调整控制器。

由于一些客观条件的限制，考虑到仿真手段能在很大程度上反映工程实际中的控制系统的工况运行以及仿真手段具有经济、高效等优点，本文将侧重于该控制系统设计过程中的步骤(4)~(8)。

实际问题中总是包含不确定的非最小相位对象，总是不可避免地存在由未建模动态产生的通常在高频下不可忽略的不确定性，总是有敏感元件的噪声、外界干扰以及输入信号的限制。这些都会影响反馈控制系统达到预期的效果。正是基

于这一原因，在控制系统设计过程的系统模型建立和控制器设计过程中考虑到这种不确定性的影响对于在工程实际应用中是否可行就显得尤为重要了。

系统鲁棒性的研究最早可追溯到研究微分方程解对初值和参数具有连续依赖性的工作。这就是要求解在给定区间的任意小变化可以由参数的充分小变化来保证。这种无穷小分析的思想在不同领域引发了不同的概念与结论。例如，偏微分方程中的适定性研究、计算方法中关于误差的灵敏性等。在控制系统的研究中，人们感兴趣的常常不是一个过程(或解)对参数变化的灵敏性，而是系统的某个性质或某个指标对参数变化的敏感程度。通常最基本的是系统的稳定性在参数变化下保持的可能性。就常系数线性系统的稳定性而言，系统的稳定性参数常在参数空间中由一组不等式加以描述，这样稳定参数常组成一个开集，这就使系统的稳定性相对参数的无穷小扰动总能保持。

实际上系统中参数是不能视为不变或仅具有无穷小扰动的，系统工作环境的变化、模型的不精确、降阶近似、非线性的线性化等均可化成一种参数扰动而论，有时系统受控对象可能有几个不同的工作状态，当用同一控制器来控制这种对象时，人们也把由于不同工作状态所对应的参数的差别视为一种扰动，当然这种参数的变化只能视为有界扰动而不是无穷小扰动。现代鲁棒性分析的最重要特点就是要求讨论参数在有界扰动下系统性能保持的能力。

20 世纪初，控制系统设计方法主要是基于 Bode 曲线和 Nyquist 曲线，可以用间接的方法处理系统不确定性问题，发展了在增益和相位存在变化时仍能保证闭环系统稳定的增益裕度和相位裕度概念。然而，遗憾的是这些处理方法大多数局限于单变量输入单变量输出(SISO)系统。随着时间的推移，科学技术的发展要求处理大量的多变量输入多变量输出(MIMO)系统的设计问题，以二次型最优控制(LQ)为代表的一类多变量控制系统设计和最优化方法应运而生。但是随着其在实际工程中的应用，发现基于 LQ 理论设计出来的控制器对系统不确定性因素反应较为敏感，也就是说，不能保证闭环系统具有一定的稳定鲁棒性和性能鲁棒性，而且控制器设计过程要求准确知道干扰过程的全部统计特性，这一要求使该理论的工程应用受到工程实际条件的某些限制(Zames et al., 1983)。另外，在实际工程应用的过程中很难得到被控对象的精确数学模型，在控制系统设计过程中所采用的模型常常是在一定程度上的经过近似化处理的数学模型，数学模型的这种不确定性必须在控制系统设计时进行考虑，因此在控制系统设计中的稳定鲁棒性和在稳定鲁棒性要求的前提条件下的性能鲁棒性问题是很值得进行研究的。从广义上来说，系统不确定性按其结构可以分为以下两类：

(1) 不确定性的结构未知，仅仅已知不确定性变化的界限；

(2) 不确定性的结构已知，存在着参数的变化(参数不确定性)。

第一类不确定性的鲁棒控制研究导致了 H_∞ 控制理论，第二类不确定性的鲁

棒控制研究导致了参数鲁棒控制理论。

根据用于反馈的信号是采用系统状态还是系统输出，可将反馈控制分为状态反馈控制和输出反馈控制。显然状态反馈控制实现起来比较容易，但在实际工程应用中，大多数系统的状态很难直接测量得到以实现反馈控制。尽管可以采用状态观测器等技术来达到系统状态重构的目的，但总不尽如人意。输出反馈控制虽然实现起来相对困难一些，但是大多数系统的输出可以直接测量得到，从而可以方便地构成反馈控制系统。

本书在作者多年研究的基础上，针对不确定时滞系统的鲁棒控制问题，从不确定系统的鲁棒控制基本理论入手，由浅入深、由易到难，系统地阐述了不确定时滞线性系统的时滞独立与时滞依赖的鲁棒控制问题、执行器具有饱和特性的鲁棒控制问题、滑模变结构鲁棒控制问题，以及一类具有非线性特性的不确定 Lur'e 系统的鲁棒控制问题。

本书的主要内容来源于作者多年研究的积累，都是一些原创性的研究成果，针对鲁棒控制理论领域多个问题的研究，逐渐形成了具有鲜明特点的研究体系。本书的完成，对于刚进入此领域研究的研究人员及工程技术人员具有很好的理论与参考价值。

1.2 不确定线性系统鲁棒控制概述

1.2.1 问题描述

控制科学主要研究如何修正动力学系统的行为以实现预定目标，这涉及被控系统、期望的性能指标以及控制手段，即如何利用控制器 K ，通过信息的变换和反馈作用，使系统 P 稳定并满足一定的性能或要求，如图 1.2.1 所示，显然反馈对系统的控制和稳定起着决定性的作用。

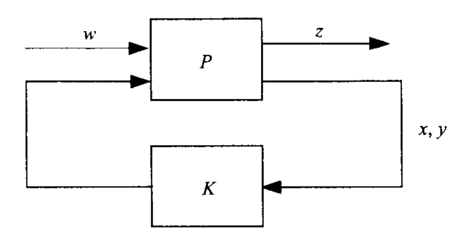


图 1.2.1 控制系统结构

控制理论主要的研究问题就是：给定系统，求反馈控制器，使得相应的闭环系统满足期望的性能指标。根据反馈信号是状态还是输出，分别地称为状态反馈控制器和输出反馈控制器。

20 世纪 50 年代，经典线性控制理论基于传递函数数学模型，以拉普拉斯变换为工具，主要采用频率响应法求解，其性能指标一般以系统状态或输出的响应时间、超调量、衰减度等表示。60 年代以卡尔曼提出的状态空间方法为代表，现代控制理论采用微分方程模型描述系统，直接在时域中求解，可实现对诸如 LQ 性能指标的最优控制。一般来讲，综合或设计控制器，经典线性控制理论立足于满足一定的性能指标，而现代控制理论则追求性能指标最优，由此优化在控制中起着重要的作用。然而实际系统不可避免地要遇到各种不确定性，包括诸如系统的未建模动态、模型参数的不确定性、工作环境的变化，降阶及线性化近似等系统本身的不确定性，以及外部干扰的不确定性，如一般统计特性未知等情形。如图 1.2.2 所示，其中ΔP代表对象P的不确定部分，由此不确定系统控制问题为：对不确定系统求反馈控制器，使得相应的闭环系统保证一定的性能指标。

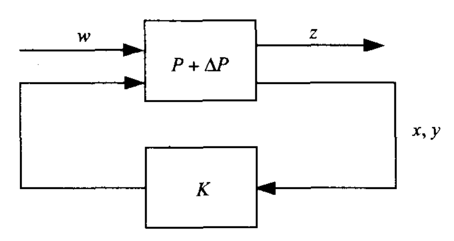


图 1.2.2　不确定对象控制系统结构

不确定对象的基本描述方法是用一个集合来代表对象的模型，该集合可以是结构化的或者非结构化的，前者主要是一些参数不确定性，而后者是一些未建模动态(也称动态不确定性)，一般来讲结构化不确定性提供的信息更具体，因而保守性更小，实际上结构化不确定性模型可以嵌入到非结构化模型中。在鲁棒分析和综合过程中，非结构化模型更多的是应用于频域(Doyle et al.,　1992)。在时域状态空间下，参数不确定性描述有多种形式(详见本书第 2 章)，将图 1.2.2 进一步分解为图 1.2.3，其中Δ代表对象的时变不确定部分。

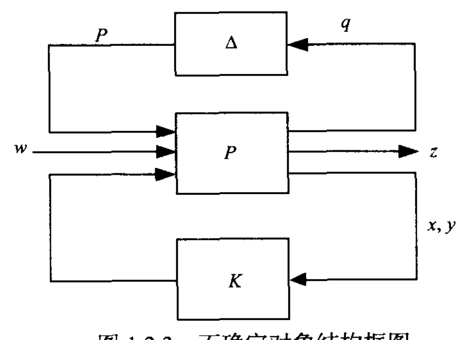


图 1.2.3　不确定对象结构框图

一般地，对此问题依据系统及其不确定性的数学描述，其求解可采用随机控制的方法、自适应控制的方法、鲁棒控制的方法、容错控制方法，模糊控制方法以及其他人工智能控制方法。鲁棒控制方法给出的是一个确定性的控制律，易于进行稳定性和其他性能分析，其基本内涵实质上是线性系统理论的深层次发展。就应用而言，控制器综合或设计可离线进行，对计算量要求不高，但由于所得到的控制器适用于所有允许的不确定性，一方面难以达到最优的性能指标，只能保证一定的指标界，另一方面不可避免带来保守性。

1.2.2 研究现状

系统鲁棒性问题也许可追溯到无穷小分析的思想，例如，微分方程解在给定区间的任意小变化依赖于初值和方程系数的充分小变化，再如偏微分方程中的适定性研究、计算方法中关于误差的灵敏性等。鲁棒控制问题事实上最初在具有摄动的精确系统的大增益反馈器设计时就有所体现，1932 年 Nyquist 稳定性判据明确给出了反馈增益与控制系统动态稳定性关系，1945 年 Bode 图用幅值和相位稳定裕量得到系统稳定所能容忍的不确定性范围，这些讨论一般主要针对单输入单输出反馈控制系统，属于经典线性控制理论范畴，其基础是参数微小摄动的微分灵敏性分析方法，以 Rosenbrock(1972)提出的多变量系统逆 Nyquist 阵列设计方法为代表，其思想也推广至多输入多输出情形。在鲁棒控制理论建立过程中，Zames (1963)提出的小增益定理影响深远，至今仍是频域分析非结构不确定性系统鲁棒稳定性的基本工具，Kalman(1964)讨论了单输入单输出系统线性二次型最优状态反馈控制律(LQ)的鲁棒性，证明其具有无穷大增益稳定裕量和 60°相位稳定裕量。

真正意义上的现代多变量鲁棒控制理论的重要标志是在参数有界扰动(而不是无穷小扰动)下讨论系统性能保持的能力，20 世纪 70 年代以后很多工作开创性地推动了鲁棒控制的发展：Davison(1976)提出的鲁棒调节器设计方法，当对象的参数发生微小变化，可以保证闭环稳定及输出渐近调节；Youla 等(1976)针对一个特定对象给出了所有镇定控制器的参数化表示；Kharitonov (1978)针对区间多项式族表示的系统不确定性，通过由四个区间端点作为系数的多项式的稳定性来判别区间多项式族的稳定性；Doyle (1982)提出可根据范数界限扰动有效地描述模型不确定性，由此发展了判别鲁棒稳定性和鲁棒性能的强有力工具——结构奇异值方法；Vidyasagar(1987)提出一个控制器对若干被控对象同时镇定问题；Safonov(1980)把经典频域分析和设计方法与现代多变量控制方法联系起来，可以对 Lyapunov 稳定性和输入输出稳定性进行统一处理；对于外部不确定性，假定干扰的统计特性未知但属于某一已知信号集合，Zames (1981)首次提出用其灵敏度函数的 H_∞ 范数作为指标，设计的反馈控制器在可能发生的最坏干扰下使系统稳定并且相应的范数指标极小，同时 Zames 还指出，LQG 的平方积分型优化指标不能保证基于状态空

间模型的 LQG 设计方法的鲁棒性。

鲁棒控制理论经过 30 年发展，成果累累，并成为当今控制理论研究中最活跃的领域之一(Bhattacharyya et al.，1991；Bhattacharyya et al.，1995；Doyle et al.，1982；Zhou et al.，1998；冯纯伯等，1995；解学书等，1994；申铁龙，1996；褚健等，2000c)。一般认为，根据研究所基于的模型不同，系统鲁棒性研究方法主要有两类：研究对象是闭环系统的状态矩阵或特征多项式的，一般采用代数方法；研究是从系统的传递函数或传递函数矩阵出发的，就常常采用频率域方法。

频率域方法中两个重要的分支：一是以系统性能分析主要是稳定性分析为基础的鲁棒控制方法，称为多项式代数方法，建立在 Kharitonov(1978)四端点定理基础上，研究的是有界实(虚)参数摄动区间多项式矩阵的鲁棒控制问题，主要处理时不变不确定系统，比较著名的结论有 Bartlett 等(1988)的棱边定理，Chapellat 等(1989)的广义 Kharitonov 定理，近期结果包括 Chen(1993)，Ivan 等(2001)，Ramirez-Sosa 等(1999)，等等，基本思想是寻找多项式族的一个更小的子集，使得族中所有多项式稳定性可由该子集中多项式的稳定性来保证局限于鲁棒稳定性分析，这类方法对控制器综合较为困难。二是以某种性能指标优化为设计依据的鲁棒控制方法，特别地，自 Zames 首创 H_∞ 控制理论后，众多的学者研究表明很多有关控制系统的鲁棒性分析和综合问题，均可以归纳为标准的 H_∞ 优化设计问题，如鲁棒镇定问题、跟踪问题、灵敏度极小化问题以及模型匹配问题，等等，Doyle 等(1989), Zhou 等(1988), Glover 等(1988), Iwasaki 等(1994)成果标志着该方法已基本成熟。H_∞ 控制是在传递函数模型的基础上引入了状态空间方法的优点，并且鲁棒控制器设计问题被赋予了一个清晰的理论。其他获得深入研究的鲁棒控制方法还有 Doyle(1982)提出的 μ 理论方法，它利用结构奇异值(SSV)将建模的不确定性进行结构化处理，并且鲁棒性能可通过一假想的不确定性来表达，从而可以将鲁棒性能问题转化为等价的鲁棒稳定性问题，因此，很好地补充了 H_∞ 控制的不足，是一种能同时考虑性能和鲁棒稳定性的分析和设计方法，但在复数摄动情况下，μ 综合方法仍不多见(Lin et al., 1993)，使用较多的综合方法仍是 Doyle 提出的 D-K 迭代极小化方法。上述理论从不同角度提出，事实上它们之间存在着深刻的联系。

时域方法以克服基于状态空间的现代控制理论的局限为出发点，考虑实际系统与数学模型之间存在偏差时，如何保证系统的稳定性和其他性能，是鲁棒控制理论研究中非常活跃的一个分支。特别地，自 Monopoli(1966)首次利用 Lyapunov 稳定性理论研究不确定系统的鲁棒镇定问题以来，对于时变和非线性摄动不确定系统，基于 Lyapunov 稳定性理论的鲁棒镇定综合方法引起了众多学者的关注。Leitmann(1979)对具有时变不确定参数系统的鲁棒镇定问题作了深入研究，得到了一些初步结果，但反馈控制律是非线性不连续的，虽可用连续函数来进一步近似(Leitmann，1981)，但不确定性须满足一定的匹配条件(Barmish, 1985)，也就是要

求不确定性和系统的控制输入以同一通道进入系统。将系统的不确定性分解成匹配部分和不匹配部分，只要系统的不匹配部分在一定的度量界内，鲁棒镇定控制律的设计可扩展到不匹配不确定性系统(Barmish，1984；Chen et al.， 1982；Tsay，1990)，一般认为 Barmish (1989)提出的二次镇定方法是时域鲁棒控制研究中深具影响的概念。同一时期，Petersen 和 Hollot(1986)通过不断放大在 Lyapunov 函数导数式中的不确定项，将鲁棒镇定控制律的设计归结为特定代数 Riccati 矩阵方程正定对称解的存在性问题，从而可得到一个线性鲁棒控制器，该方法要求不确定性满足秩 1 条件，并明显引进了一定的保守性，但能有效地处理出现在系统模型中的任意形式的时变参数不确定性，因此成果颇丰(Petersen，1994，1992，1987；Rachild et al., 1989)。事实上，Khargonekar 等(1990)已经证明了具有范数有界不确定性系统的二次镇定的 Riccati 矩阵方程条件是一个充分必要条件，同时还证明了这一类不确定系统二次镇定问题等价于一个适当的线性时不变系统的 H_∞ 控制问题，从而得出具有范数有界参数不确定系统的二次稳定性的条件和小增益定理是等价的。

1.3 不确定时滞系统描述与控制

在工程实际中，许多实际的系统都含有时滞，如涡轮喷气式飞机、微波振荡器、核反应堆、轮船定向仪、化工系统、无损耗传输系统等。通常时滞是系统产生振荡和不稳定的根源。控制系统中存在时滞使得理论分析和工程应用增加了特殊的难度，同无时滞系统相比，滞后使系统的相应性能变差，甚至稳定性难以保证，如何将解决线性不确定系统的鲁棒控制技术应用于时滞系统便成为一个十分迫切的问题。因而时滞系统的鲁棒控制研究也就成为研究者所关注的主要问题之一。

纵观时滞系统的研究和发展，很明显存在两条主要线索，即频域与时域。时滞系统的分析与综合在频率域进行，由于变换的局限性，很难处理时变时滞系统，并且，频率域内的处理往往比较繁琐。虽然高性能比的数字计算机在控制系统 CAD 上的应用，解决了计算复杂性问题，但对于时变时滞系统或摄动问题，Laplace 变换是无法解决的。时滞系统的时域分析，克服了频域分析不能处理时变和参数摄动的不足，是时滞系统频域分析的有益补充。自从 20 世纪 70 年代 Lyapunov 泛函引入时滞系统的分析设计以来，Lyapunov 方法成为人们手中处理时滞系统的有力武器。Lyapunov 的优点主要体现在：方法统一，最后都可以转化为一个类 Riccati 方程与线性矩阵不等式的解；处理范围广泛，不管是参数摄动还是时变时滞系统，都可以处理。因此，Lyapunov 方法在工业实际中有广阔的前景。

本书主要在时域状态空间下研究不确定时滞线性与一类非线性系统的鲁棒控

制问题，主要基于 Lyapunov 稳定性理论并结合 Riccati 方程与线性矩阵不等式，重点在鲁棒稳定性与控制器综合两方面。

1.3.1 不确定线性时滞系统的鲁棒控制

1. 鲁棒二次镇定

不确定时滞线性系统的鲁棒二次镇定分析一直是时滞系统的一个难点。人们从各种途径出发，获得了很多用于判断标称不确定时滞线性自治系统(1.3.1)(不确定描述详见本书的第 2 章)的鲁棒二次镇定的判据。这些判据按照它们对滞后时间的依赖关系而分为两类：时滞无关判据(秦元勋，1960；吴冲锋等，1990)和时滞相关判据(Morari et al.，1989)。时滞无关判据一般比较简单，但较为保守，尤其是对小时滞对象。时滞相关判据一般难以应用，例如，需要解超越方程

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(A_0+\Delta A_0)x(t-\tau) \tag{1.3.1}$$

Bellman 等(1963)指出，式(1.3.1)的时滞独立稳定的充分必要条件是系统闭环特征方程满足

$$P(s)=\left|sI-(A+\Delta A)-(A_0+\Delta A_0)\mathrm{e}^{-\tau s}\right|\neq 0,\quad \forall\,\mathrm{Re}\,s\geqslant 0,\quad \tau\geqslant 0$$

因为时滞系统特征方程有无穷多解，所以该判据并不是一个具有实用价值的判据。

早在 20 世纪 60 年代，秦元勋(1960)在研究火箭燃烧控制时提出了根据判断时滞系统的根轨迹的时滞无关稳定性的充要判据；吴冲锋等(1990)在前文的基础上，根据一个变换得出的辅助代数多项式的根的分布，提出了类似劳斯-赫尔维茨判据的时滞无关稳定性的充要判据：只要通过判定该代数多项式的系数多项式是否满足劳斯-赫尔维茨，这样就大大简化了判定的复杂程度，提高了判据的适用性。

Biernacki(1987)根据复数域的 Lyapunov 方程的正定 Hermitian 矩阵解的存在性研究了系统(1.3.1)的稳定性，提出了另一时滞系统的稳定独立判据。复数域的 Lyapunov 方程的正定 Hermitian 矩阵解的存在性也是研究线性不确定时滞系统的重要的解析法。Mori(1981)针对系统(1.3.1)提出了对于某滞后 τ 的系统稳定的代数判据

$$\mu_i(A)+\|A_0\|_i\leqslant 0$$

其中，$\|A_0\|_i$ 表示矩阵的 1，2 或 ∞ 范数，$\mu_i(A)$ 为矩阵范数。Bourles(1987)把该结果推广到线性时变时滞系统，提出了线性时变时滞系统的 α-稳定性判据，该判据给出的是时滞无关判据。

Lyapunov 第二方法的稳定性判定定理提供了判断复杂系统稳定性的有力工

具。利用 Lyapunov 第二方法，通过构造恰当的 Lyapunov 函数求解时滞系统的无记忆反馈控制律，是得出时变及不确定时滞系统鲁棒二次镇定判据的有效途径。无记忆反馈是指反馈作用中只针对当前状态信息，而不包括过去时刻的状态或控制量。基于 Lyapunov 方法的无记忆反馈控制不但设计简便，在线计算量少，而且便于闭环稳定鲁棒性分析，因而近年来受到很多学者重视。

苏宏业(1996，1997)基于 Lyapunov 稳定性理论第二方法，得出了基于 Riccati 方程的系统(1.3.1)的鲁棒二次镇定的时滞相关与时滞依赖的充分必要条件(详见本书第 3 章)，该方法通过求解一类 Riccati 方程，使得鲁棒稳定性问题变得简单、实用。苏宏业(1998)还得出了基于线性矩阵不等式的系统(1.3.1)的鲁棒稳定性的时滞相关与时滞依赖的充分必要条件，与已有的结果相比，保守性更小。Wang(1987)、Hmamed(1991)、Shy 等(1993)、Lee(1995)和 Nian 等(2001)讨论了具有两个不确定非线性扰动项的时滞系统的鲁棒稳定性，提出了鲁棒稳定性的时滞项关于时滞无关的各种判据，给出了这类系统鲁棒稳定的一些充分条件。Sun 等(1997a)以代数 Riccati 形式，给出了一类具有多时滞不确定时滞系统鲁棒稳定的时滞相关条件。

Thowsen (1983)则将二次稳定概念引入时滞系统，苏宏业等(1996)提出了一种无记忆状态反馈二次稳定化控制律的设计方法，Shen 等(1991)将 Petersen 等(1986)的 Riccati 方程方法推广到带时滞情形，Phoojaruenchanachai 等(1992)提出可以将不确定时滞系统的鲁棒镇定问题转化成为一个线性时不变系统的 H_∞ 控制标准问题，这样通过求解一个代数 Riccati 矩阵方程求得无记忆状态反馈控制器，Mahmoud 等(1994)则针对具有范数有界不确定的线性时滞系统，直接证明二次镇定的充分条件可归结为一个 Riccati 方程的解的存在性，这方面更进一步的结果可参见苏宏业等(1998)及其参考文献。所有这些方法的共同特征是分析和综合的结果与时滞大小无关，当然其求解会带来一定的保守性。应用 Hale (1973)提出的状态变换方法，并结合 Razumikhin 稳定性定理，可得到时滞依赖鲁棒稳定性判据和综合方法(Niculescu et al.，1994)。蒋培刚等(2000)在现有时滞无关方法的基础上，进行一系列改进的工作，使得时滞无关方法趋于完善和系统化，对时滞依赖方法也进行初步研究和介绍，具体见其参考文献。

2. 鲁棒控制器设计

鲁棒控制假设不确定系统未知但有界，对不确定系统用确定性方法求解控制器，使得对允许范围内的所有不确定性，闭环系统具有期望的性能。鲁棒控制理论的重要标志是参数有界扰动(而不是无穷小扰动)下讨论系统性能保持的能力。在 20 世纪 60 年代，被称为现代控制理论的状态空间方法得到了很大的发展，出现了以 Kalman-Bucy 滤波器和最优调节理论为基础的 LQG 反馈设计方法，又称 H_2 控制方法。然而，由于忽略了对象的不确定性，而且对系统存在的干扰信号作

了苛刻的要求，许多现代控制理论成果并未在实际控制系统中取得较好的应用。比如 LQG 设计方法，它需要精确的数学模型，如果系统的数学模型不确定，LQG 设计就不能保证系统具有鲁棒性。Zames(1981)提出了 H_∞ 控制器设计方法。他认为基于状态空间模型的 LQG 设计方法之所以不好，主要是由 LQG 使用的积分指标造成的；另外，用白噪声模型表示不确定的干扰也是不现实的。因此，在假定干扰属于某一已知信号集的情况下，他提出用其相应的灵敏函数的 H_∞ 范数作为指标，设计目标是在可能发生的最坏干扰下使系统的误差在这种范数意义下达到极小，从而将干扰问题化为求解使闭环系统稳定，并使相应的 H_∞ 范数指标极小化的输出反馈控制器问题。如果使系统干扰至误差的传递函数的 H_∞ 范数最小，则具有有限功率谱的干扰对系统误差的影响将会降到最低限度。由于传递函数的范数可描述为有限输入能量到输出能量的最大增益，所以采用它作为指标可以使具有有限功率谱的干扰对系统期望的输出的影响最小。

1984 年，Doyel 提出了 H_∞ 控制问题的求解方法，即首先将一个 H_∞ 控制问题转换成一个模型匹配问题，然后将这种方法转换成广义距离问题，最后通过求解一个 Nehari 问题来解决。但是这种方法涉及的计算非常复杂，计算量也很大。1988 年，Glove 和 Doyle 提出了“2-Riccati 方程”方法，它是 H_∞ 控制理论的一个重要突破成果，只需要求解两个非耦合的代数 Riccati 方程，便可以得到阶次不超过广义对象阶次的 H_∞ 控制器。1989 年，Doyle 等对 H_∞ 控制问题的状态空间分析法进行了总结，并强调了 H_∞ 控制问题和 LQG 问题的联系，这样 H_∞ 控制问题在概念和算法两个方面都被大大地简化了。

自 20 世纪 90 年代以来，在控制理论与工程实际中，随着 Matlab 等系统软件分析包的广泛应用，特别是线性矩阵不等式(LMI)的引入，使得求解一些复杂的控制问题(如原来得出的稳定性条件是一个黎卡提代数方程)非常困难，而通过线性矩阵不等式得出的鲁棒稳定性条件，则简单易解。1994 年，Boyd 提出了用线性矩阵不等式求解 H_∞ 控制问题，使得算法更加简化。直到现在，线性矩阵不等式已经成了一个重要工具，它成为许多学者分析系统稳定性的首选。

鲁棒控制器的设计也日臻完善，目前，较为完备的鲁棒控制器的设计方法有以下两类：

(1) 以参数空间为基础的控制系统鲁棒分析与设计方案，较好的解决了参数不确定性系统的控制系统综合问题(Dragoslav et al., 1989)。为了提高系统的鲁棒性，参数空间设计方法一改过去在参数空间中实现点的“紧配合”设计方法，在牺牲一定性能指标的前提下，充分考虑参数的摄动范围，实现参数域到域的“松配合”。

(2) 在解决结构不确定问题上，基于算子理论和 H_∞ 理论的鲁棒控制器设计方案，在设计过程中对控制对象结构的不确定性，通过求解灵敏度函数 H_∞ 范数的

极小化问题，设计出最坏情况下鲁棒稳定的控制器。

本书主要介绍以下三种鲁棒控制器的设计方法：

1) 可靠控制

控制系统可靠性是其质量好坏的主要技术指标。通常，控制系统可靠性可定义为在规定的工作条件下和规定的时间内，控制系统成功地完成规定功能的能力，它是对控制系统可靠程度的定性评价。控制系统可靠度定义为在规定的工作条件下和规定的时间内，控制系统成功地完成规定功能的概率，它是对控制系统可靠程度的定量评价。这里的“工作条件”包括外界环境条件(如温度、压力、振动等)和内部使用条件(如元件的筛选情况、老化时间等)。这里的“时间”是一种广义的时间，它可以是小时、天、月、年之类的单位，也可因对象不同而指一些相当于时间的量，如次数、周期、距离等。在系统执行任务期间，发生局部故障是可以容许的。不管这种故障是否已在执行任务过程中被消除，只要系统能够按照预定的计划完成规定的功能，我们就认为系统是可靠的。

基于可靠控制设计的控制器使得无论控制元件(执行器或传感器)是否出现故障(如图 1.3.1 所示)的都能保证闭环系统渐近稳定且满足一定的性能指标。

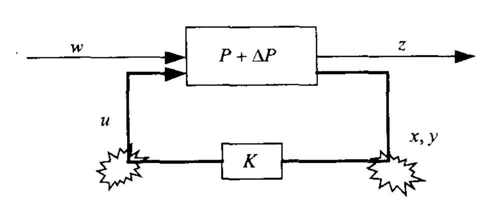


图 1.3.1 传感器和执行器故障示意

自 20 世纪 70 年代 Siljak 第一次提出可靠控制以来，已经引起了许多学者的兴趣，一些可靠控制器的设计方法也相继提出。Wang 等(1995)基于系统极点的方差和大小作相应限制的假设研究了一类连续时间线性系统的可靠控制器的设计问题；Zhao 等(1998)针对一类具有冗余执行器的线性系统，通过超前补偿器修正冗余执行器控制通道的动力学特性，研究了可靠状态反馈控制器的设计问题；Liao 等(2002)把控制表面故障带来的不确定性通过用凸多面体形式来描述，研究了基于线性矩阵不等式的鲁棒可靠飞行跟踪控制问题，减少了设计方法的保守性，取得了较好的控制效果。

以上提及的文献所使用的故障模型都是离散的故障模型。也就是说，一旦执行器或者传感器第 i 条通道发生故障，就将第 i 条通道的控制信号 u_i 或观测信号 y_i 设为零。但是在实际应用中，执行器或者传感器发生故障时，控制信号或观测信号的输出值并不为零。而是正常控制信号或观测信号(假定正常控制信号或观测信号为 1)的百分比，加上一定的扰动误差。比如当执行器第 i 条通道发生故障时，

输出值为正常控制信号的 30%±1%。Ackerman(1985)把这一类故障模型定义为连续的故障模型，这种模型不仅考虑了所有控制元件正常运转的情况，而且考虑了所有控制元件出现故障的情况。当执行器或传感器第 i 条通道发生故障时，通过与正常信号的比较，确定第 i 条通道的控制信号 u_i 或观测信号 y_i 的上界或下界。Yang 等(2001)在此模型的基础上，研究了输出反馈控制器的 H_∞ 控制问题，得出了基于 Riccati 代数方程的可靠控制器的设计方法，由于考虑了故障模型的扰动误差，使得此故障模型更能精确地刻画实际的对象。

2) 饱和控制

在工业实际中，由于执行器的动作受到物理限制，使得执行器的动态特征常常会引入某些非线性因素，其中常见之一就是饱和。执行器的饱和特性会使控制系统的性能恶化，响应速度降低并且导致积分饱和或极限环，影响系统的稳定性。图 1.3.2 描述了在扇形区域$[\sigma,1]$内的非线性饱和函数。图 1.3.3 描述了具有控制输入约束的常规的饱和特性。

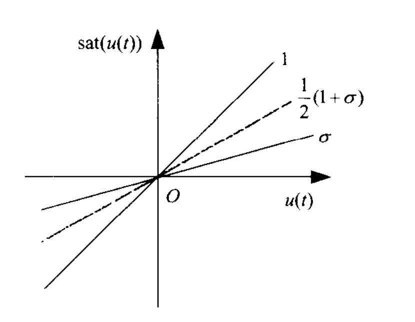


图 1.3.2　扇形非线性饱和特性

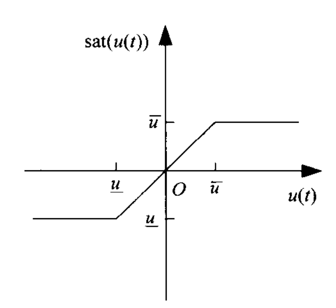


图 1.3.3　常规的饱和特性

为了消除饱和对系统稳定性的影响，人们想到了很多方法。1983 年，Glattfelder 和 Schaufelberger 提出了用反积分饱和法消除饱和的影响。这种策略能够改善闭环性能，与工业实际应用联系紧密。但是，这种方法没有理论依据，只是当执行器出现饱和现象的时候，提出的一种就事论事的后验方法，对工业环境的依赖性很大。近年来，不少学者开始研究带饱和执行器的线性系统稳定性分析及镇定的方法，这种方法直接考虑执行器的饱和特性，设计一个无记忆的状态反馈控制器，使得闭环系统鲁棒稳定。刚开始，还不能直接得出闭环系统全局镇定的方法，只能得出局部镇定方法。Kosut(1983)和 Krikelis 等(1984)利用圆盘定理得出了具有饱和执行器的线性系统局部镇定的充分条件；Gutman 等(1985)通过使用二次 Lyapunov 函数，定义了具有饱和执行器的线性系统局部稳定的区域；Vassilaki 等(1988)针对一个具有输入和输出约束的线性系统，通过使用非二次的 Lyapunov 函数，设计了一个无记忆的线性状态反馈控制器，能保证状态以最快的速度收敛到平衡点。近年来，带有饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒全局镇定问题受到关

注。Chen 等(1988)对具有饱和执行器和扇形非线性饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒全局镇定问题进行了研究。Chou 等(1989)对存在单一的状态滞后及饱和执行器的不确定线性时滞系统，用矩阵测度的概念及比较理论给出了输出反馈镇定的充分条件；Niculescu 等(1996)用 Razumikhin 方法研究了一类带饱和执行器的不确定线性时滞系统的鲁棒镇定问题，得到一个可用线性无记忆状态反馈控制率来进行鲁棒镇定的判据及相应的控制器设计方法，但该文所得结果以求代数 Riccati 方程的形式给出，需要对标量及镇定对称矩阵通过参数调节进行整定。Oucheriah(1996)针对一类输出与输入受限制的带有饱和执行器的线性系统，提出了保持闭环系统全局稳定的方法，这种方法通过一个具有指定衰减度的状态观测器重构状态，直接得出了全局鲁棒稳定的充分条件，不需要调节参数。苏宏业等(2000a)将线性不等式方法推广到具有扇形非线性饱和执行器约束的不确定线性时滞系统，得出了不需要调解参数的鲁棒全局镇定的充分条件。

3) 变结构控制

从原理上看，不确定性对象是由一族系统描述的控制对象组成，对它的控制则是对一族系统的控制。无论是经典控制方案、多变量频域控制方案，还是鲁棒控制方案，毕竟都局限于固定结构的控制方法，以固定结构的控制器去控制一族系统。这种情况下，要使闭环系统能正常工作，以不变应万变，远非易事，往往会显得被动和难以适应。随着数学理论和计算机技术的飞速发展，对控制系统内在物理过程的描述更加精确，控制算法的工程实现能力亦大为提高，因此，为了增强控制系统对不确定性因素的稳定鲁棒性，并赋予高的性能指标，突破固定控制结构的框架，有可能且有必要采用变化结构的非线性反馈控制方案。20 世纪 50 年代由苏联学者 Emelyanov 提出的变结构控制(variable structure control, VSC)方案，以其独特的优点，为不确定性系统提供了一种很有前途的控制系统综合方法。“变结构”一词意味着控制器的结构可能会发生变化。从广义上看，目前变结构系统主要有两类：一类是具有滑动模态的变结构系统；另一类是不具有滑动模态的变结构系统。一般变结构系统均指前者，这是由于具有滑动模态的变结构系统不仅对系统的不确定性因素具有较强的稳定鲁棒性和抗干扰性，而且可以通过滑动模态的设计获得满意的动态品质，同时控制简单，易于实现，所以基于滑动模态的变结构控制系统在国际上受到了广泛重视(冯纯伯，1990)。本书所研究的变结构控制系统均指具有滑动模态的变结构控制系统。

变结构控制系统的基本原理在于，当系统状态穿越状态空间的滑动超平面时，反馈控制的结构就发生变化，从而使系统性能达到某个期望指标(Utkin, 1977)。由此可以看出，变结构控制系统能够通过控制器本身结构的变化，使得系统性能保持一直高于一般固定结构控制所能达到的性能，突破了经典线性控制系统的品质限制，较好地解决了动态与静态性能指标之间的矛盾。

在一定的条件下，变结构控制系统具有如下特点。

(1) 在满足一定的匹配条件情况下，变结构控制系统的滑动模态对系统的扰动和参数摄动影响具有完全的鲁棒性，或曰有不变特性(Drazenovic, 1969；Petersen，1985)。这个匹配条件所代表的物理意义也就是，系统所有参数摄动和扰动这些不确定因素均可以等价为输入通道中的不确定性。正是这个独特的优点，才使 20 世纪 50 年代产生的变结构控制，经过二十余年的沉寂，重新获得强大的生命力。

(2) 在滑动模态阶段，变结构控制系统的动态特性可以由一个降阶的等效线性运动方程来完全表征(Utkin, 1977; Hung et al., 1993)。并且这个等效滑动模态方程的运动品质可以在预先通过极点配置、最优控制等方法来保证(高为炳，1998)。

(3) 变结构控制系统的设计可以分解为两个完全独立的阶段(Utkin, 1977)：第一个阶段是到达阶段，系统能够从任意初始状态出发，在变结构控制律的作用下进入并到达滑动模态；第二个阶段则是滑动模态阶段，系统状态在滑动超平面上产生的滑动模态运动，趋向于状态空间原点。

(4) 变结构控制系统理论的出现，突破了经典线性控制系统的品质限制，较好地解决了动态与静态性能指标之间的矛盾。

(5) 变结构控制系统可以在保证稳定性的同时具有快速的响应特性。快速响应特性可以通过提高变结构控制系统的增益获得，而稳定性的保证则可以通过切换面合适的选择来获得。

(6) 相对其他的控制方法，变结构控制系统的物理实现较为简单。

作为设计方法，常常没有唯一的解答，变结构控制尤为突出。这是由于以下几方面出现了多样性，导致增大了变结构控制器设计的多样性，这几方面分述如下：

(1) 系统模型。一个系统的数学模型，经过各种状态变换，导致各种不同的简化形式。线性系统有以下形式：一般形式，即 (A,B,C) 模型；简约型，即 $B=\begin{bmatrix}0^{\mathrm{T}} & B_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，$B_2$ 是非奇异方阵；可控典范型等。非线性系统类型更多，在此不再赘述。

(2) 到达条件。到达条件的类型有不等式形式与等式形式；每个切换面均为滑动模态区及所有切换面之交为滑动模态区。

(3) 变结构控制的结构。高为炳(1998)给出了多种变结构控制函数的结构，使变结构控制问题归结为求一定结构中所包含的系数及函数。

(4) 切换函数形式。通常所用的切换函数或者是特殊的二次型函数，它一般可以化为两个线性函数，其中一个给出常点，另一个给出止点集从而构成滑动模态区，或者是线性函数。

(5) 符号判定方法。在判定 $\dot{S}(X)$ 及 $\dot{V}(S)$ 的符号时，往往可以采用不同的方

法，从而导致不同的变结构控制律。

在设计变结构控制过程中，由于有上述几种多样性，所以可建立不同的变结构控制。如何选择一个良好的变结构控制器，很大程度上决定于工程实际。

为了便于理解变结构控制器的设计方法，这里我们给出一个主要思路，即把变结构控制系统的运动分为两个阶段，分阶段研究和设计。

第一阶段：系统状态由任意初始状态位置向滑动模 $S=0$ 运动，直到进入。该阶段中 $S\neq 0$，此时的设计任务是使系统能够在任意状态进入并到达滑动模态。

第二阶段：系统状态进入滑动模并沿着滑动模运动的阶段。在该阶段中，$S=0$。此时的设计任务是保证 $S=0$，并使此时的等效运动具有期望的性能。因此，我们可以将变结构控制系统的设计分为互相独立的两个步骤。首先进行切换函数的设计，使得等效运动方程具有满意的性能。然后，根据滑动模态的到达条件进行控制器的设计。

1.3.2 不确定 Lur'e 时滞系统的鲁棒控制

1. Lur'e 控制系统描述

Lur'e 控制系统是由原苏联著名学者 Lur'e 在 20 世纪 40 年代研究飞机自动驾驶仪的控制问题时提出的。当时，如果用传统的精确线性化的方法，飞机飞行的动力学模型将存在着很大的建模误差，造成了工业设计中的困难。Lur'e 假定飞机飞行的动力学模型存在非线性扰动，经过反复的实验与计算，验证了非线性扰动位于有限的扇形区间内(也有学者(年晓红，1999a)把它叫做有限的霍尔维茨角域图 1.3.5)或者位于无限的开平面内(无限的霍尔维茨角域图 1.3.6)。此时，以此假设为依据的 Lur'e 控制系统的结构如图 1.3.4 所示。

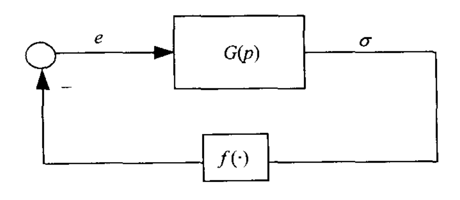


图 1.3.4 Lur'e 控制系统结构

这是一个以传递函数为基础的单输入-单输出的经典系统。它的前向通道是一个线性的定常系统，反馈部分是一个无记忆的非线性环节，即一个非线性静态映射。它的系统方程可以写成如下的形式：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax-Df(\sigma(t))\\ \sigma(t)=Cx\end{cases} \tag{1.3.2}$$

其中，$f(\sigma(t))$是一个非线性扰动，$G(p)=C[pI-A]^{-1}D$。假设$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m)$，$f(\sigma)=(f_1(\sigma_1),f_2(\sigma_2),\cdots,f_m(\sigma_m))^{\mathrm{T}}$，非线性扰动描述如下：

位于有限的霍尔维茨角域(如图 1.3.5 所示)

$$f_j(\cdot)\in K_j[0,k_j]=\{f_j(\sigma_j)\,|\,f_j(0)=0,0<\sigma_j f_j(\sigma_j)\leqslant k_j\sigma_j^2\ (\sigma_j\neq 0)\},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.3.3}$$

位于无限的霍尔维茨角域(如图 1.3.6 所示)

$$f_j(\cdot)\in K_j[0,\infty]=\{f_j(\sigma_j)\,|\,f_j(0)=0,0<\sigma_j f_j(\sigma_j)\leqslant \infty\},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.3.4}$$

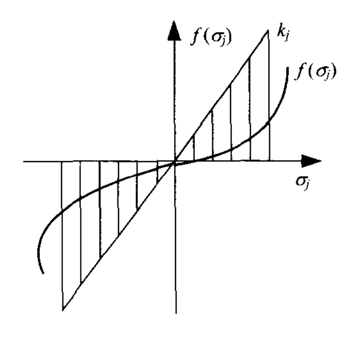


图 1.3.5　有限霍尔维茨角域

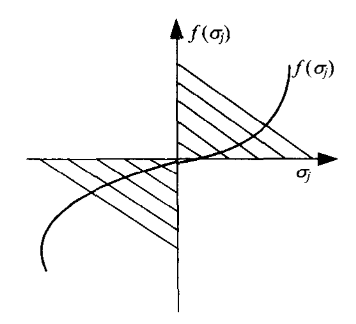


图 1.3.6　无限霍尔维茨角域

2. 不确定 Lur'e 时滞系统鲁棒控制

图 1.3.4 所示的非线性系统具有一个特殊的结构，如果反馈通道只包含一个常数增益，也就是如果$f(\sigma(t))=a\sigma(t)$，则整个系统即线性反馈系统的稳定性，可以简单地通过检查闭环系统矩阵$A-abc$的特征值来确定。然而，当整个系统具有一个非线性函数$f(\sigma(t))$时，其稳定性分析是相当困难的。

图 1.3.5 和图 1.3.6 所示的非线性是以两条相当于常数增益反馈的直线为界的，根据这一点，好像非线性系统的稳定性与常数增益反馈系统的稳定性应该具有某种联系。1949 年，苏联科学家 M. A. 艾泽曼(M. A. Aizerman)得出如下的推测：当$u(t)=0$时，如果矩阵$[A+DCK]$对于$[0, k](k=\max(k_j))$中的所有值是稳定的，则非线性系统(1.3.4)是全局渐近稳定的。艾泽曼的推测是一个非常令人感兴趣的推测。如果这个推测是正确的，他将允许我们通过简单地考察线性系统的稳定性来导出非线性系统的稳定性。1951 年 Lur'e 出版了具有里程碑意义的专著《一些非线性控制问题的研究》，通过几个反例证明了艾泽曼的推测是错误的，使得当时弥漫

在 Lur'e 控制系统的稳定性研究学术界的乐观气氛一下子变得茫然起来。这以后，许多研究者继续探索保证非线性系统(1.3.4)稳定性的条件。1963 年，苏联学者克拉索夫斯基(Krasovskii)退而求其次，考虑了非线性系统(1.3.4)，利用著名的 Lyapunov 第二稳定性定理，取 Lyapunov 函数 $V=f^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}Df$，提出了保证自治系统稳定的克拉索夫斯基判据。1973 年，波波夫(Popov)针对非线性系统(1.3.4)的子系统，增加了一些附加条件，导出了渐近稳定性的一个充分条件，它使人们联想到线性系统分析中的奈奎斯特判据(一个必要和充分条件)。但是，这个充分条件必须要求矩阵 A 是霍尔维茨的(即它的所有特征值严格地位于左半平面)，矩阵对 $[A,D]$ 是可控的，非线性只能位于有限的霍尔维茨角域里。以上的这些学者的研究，为 Lur'e 控制系统的稳定性研究打下了坚实的基础。

20 世纪 60 年代，由于电子计算机的飞速发展和航天飞行器等高技术的推动，产生了基于状态空间模型的现代控制理论。其主要研究多输入-多输出的被控对象，它用状态方程(即一阶微分方程组)代替经典控制理论中的高阶微分方程来进行系统描述，有利于计算机进行计算和控制。1965 年，克拉索夫斯基利用状态空间重新描述了 Lur'e 控制系统，其系统结构如图 1.3.7 所示。

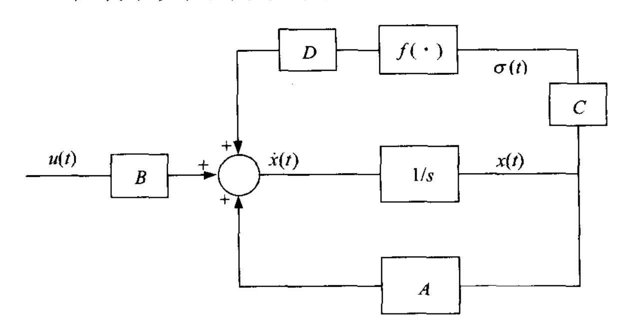


图 1.3.7 Lur'e 控制系统状态空间描述

此时，Lur'e 标称控制系统描述成如下的形式：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+Df(\sigma(t))\\ \sigma(t)=Cx(t)\end{cases} \tag{1.3.5}$$

那么，为了保证整个系统的稳定性，需要什么样的附近约束呢？即使找到了这样的约束条件，又怎样在理论上去证明，求解保证系统稳定性的条件。这些都是迫在眉睫的问题，需要人们去探索，去研究。赵素霞(1987)研究了具有多个执行部件的 Lur'e 控制系统的鲁棒稳定性，得出了黎卡提代数方程形式的鲁棒稳定性判据。Grujic 等(1987)研究了具有多个非线性项的 Lur'e 控制系统的鲁棒稳定性，给出系统鲁棒稳定的 Popov 频域准则和代数判据。Liao(1989)研究了间接 Lur'e 控制系统的鲁棒稳定性，得出了以黎卡提代数方程为基础的鲁棒稳定的充分必要条

件。Tesi 等(1991)研究了不确定参数空间 Lur'e 控制系统的鲁棒稳定性，得到了系统鲁棒稳定的充分条件；Gan 等(1999)对这一问题进一步研究、推广和改进了 Tesi 和 Vicino 的结论，得出了 Lur'e 直接控制系统的鲁棒绝对稳定的结论不成立。

半个多世纪以来，非线性科学越来越受到人们的重视，数学中的非线性分析、非线性泛函，物理学中的非线性动力学，发展都很迅速。与此同时，非线性系统理论也得到了蓬勃发展，有更多的控制理论专家转入非线性系统的研究，更多的工程师力图用非线性系统理论构造控制器，取得了一系列成就。正是在这样的背景下，Lur'e 控制系统的鲁棒控制研究有了很大的发展，形成了自动控制理论中具有完整理论体系的一个重要分支。

3. 不确定 Lur'e 奇异时滞系统鲁棒控制

奇异系统，又叫强耦合系统(Jamshidi，1983)，它的模型是建立在“奇异摄动”概念的基础上的，这种概念对应于正则摄动的概念，正则摄动发生在系统状态方程的右边，是系统参数的摄动；而奇异摄动在状态方程的左边进行摄动，是状态的摄动，即成为小参数乘以状态变量的时间导数。实际上，许多系统，包括大多数维数很大的系统，都有呈现奇异摄动特性的快变变量。如电力系统，频率和电压的瞬变过程占用的时间可以从几秒钟到几分钟。在发电机调节器中，储能转轴和调速器动作的瞬变过程的时间约为几秒钟，在原动机的运动中，储存的热量和负载电压调节器的瞬变过程的时间约为几分钟(Kokotovic，1979)。在许多其他的实际系统和实际过程中也有类似的时标特性，例如，冷轧机的工业控制系统(Jamshidi，1974)、生物化学过程(Jamshidi，1972)、核反应堆(Kelley et al.， 1970)、飞机和火箭系统(Aedema，1974)，以及化学扩散反应(Cohen，1974)等。比如针对系统(1.3.5)，当有奇异摄动发生的时候，系统可能变成如下的形式：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u_1(t) + D_1f_1(\sigma(t)) \\
\varepsilon\dot{x}_2(t) = A_2x_2(t) + B_2u_2(t) + D_2f_2(\sigma(t)) \\
\varepsilon\dot{x}_3(t) = A_3x_3(t) + B_3u_3(t) + D_3f_3(\sigma(t)) \\
\quad\vdots \\
\sigma(t) = Cx(t)
\end{cases}
\tag{1.3.6}
$$

其中，$x_1(t)$ 为适当维数的慢变状态分量；$x_2(t),x_3(t),\cdots$ 分别为适当维数的快变状态分量；$A_1,\cdots,B_1,\cdots,D_1,\cdots$ 为相对应的参数矩阵分量；ε 为摄动项，它是一个趋近于零的正数。当摄动项 $\varepsilon\to 0$ 时，一些状态分量的一阶微分就可以忽略不计，此时系统(1.2.1)就可以写成如下的形式：

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(\sigma(t)) \\ \sigma(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1.3.7}$$

其中，矩阵 E 是奇异的，$\text{rank}\, E = r \leqslant \text{rank}\,[x(t)]$。实际上系统(1.3.7)是系统(1.3.8)的近似集结模型，是典型的奇异系统。奇异系统又叫绝对系统、广义状态空间系统、微分代数系统或者不完全状态系统(Dai,1989)，这时候我们不能通过传统的Lyapunov稳定性第二定理来研究奇异系统的稳定性。因为此时，不仅要保证奇异系统(1.3.7)在 $[0,\infty)$ 是稳定的，还要研究它的解在 $[0,\infty)$ 是正则的、无摄动的。Lewis(1989)得出了一个很重要的结论，对奇异系统稳定性研究有着非常重要的意义，他指出：

(1) 如果行列式 $(sE-A)$ 没有相同的零点，则矩阵对 (E,A) 是正则的。

(2) 如果 $\deg(\det(sE-A)) = \text{rank}\, E$，则矩阵对 (E,A) 无摄动。

奇异系统(1.3.7)可能有一个摄动的解，但是矩阵对 (E,A) 的正则性与无摄动性的存在确保了奇异系统(1.3.7)有一个正则、无摄动的唯一解。Xu 等(2002a)从理论上证明了只要矩阵对 (E,A) 是正则的、无摄动的，则奇异系统(1.3.7)的解在 $[0,\infty)$ 是正则的、无摄动的。如果奇异系统(1.3.7)是正则的、无摄动的，并且稳定的，则我们说奇异系统(1.3.7)是鲁棒稳定的(Xu et al., 2002a)。

迄今为止，人们研究奇异系统的稳定性主要从三种方法入手，即状态空间方法(Verghese et al., 1981；Dai,1989)，几何方法(Lewis et al., 1987, 1991)，多项式矩阵方法(Vidyasagar，1987)。状态空间方法是基于奇异系统的状态方程，通过研究状态方程的结构特性，设计保持奇异系统鲁棒稳定的控制器；Wonham(1979)提出了用几何方法解决线性系统的鲁棒稳定性问题，其主要思想包括基本理论和反馈设计两大部分。基本理论部分讨论了线性系统的状态空间描述与其他描述之间的关系，证明了这几种描述在一定条件下是等价的。反馈设计部分推广了不变子空间概念及其在线性解耦控制的结果，得出了局部受控不变分布的结果。Lewis 等(1991)对以上结论进行了扩展，把它拿来解决奇异系统的输出反馈控制器的设计问题。多项式矩阵方法基于转移矩阵的某种稳定化因式分解，把转移矩阵分解成一些真的和非真的因子，然后通过适当的变化把非真的因子转换成真的因子，再针对每个真的因子设计保持奇异系统鲁棒稳定的控制器。

以上的三种方法在产生的初期确实带动了奇异系统鲁棒稳定性研究的发展，但随着这些方法逐步应用到实践中，一些缺陷就暴露出来了。几何方法一个显著的缺陷就是使用的数学工具比较抽象，理论上也逐渐暴露出其局限性。首先，这种试图将线性系统理论照搬到奇异系统理论的想法，遇到了计算上的意想不到的困难；其次，理论研究表明，可以这样做的奇异系统也只是特定的一种(Liu et al., 1997)。这样几何方法几乎很难用到实际的奇异系统中，不可避免地使这种方法的

发展陷入了困境。多项式矩阵方法也有一个显著的缺陷就是所有设计的控制器必须保持相同的稳定裕度，如果有一个控制器不稳定，将带来设计的失败(Alion, 1991)。虽然，Wang 等(1989)和 Liu 等(1997)通过建立奇异系统的频率范围，推广了多项式矩阵方法，但由于在把非真的因子转换成真的因子的时候，增加了一些假设条件，使得该方法在实际的应用中受到很多限制。实际上，近年来，由于状态空间方法在正则系统鲁棒稳定性研究中的日臻完善，许多学者把许多正则系统的状态空间的理论推广到了奇异系统，使得奇异系统的鲁棒控制的研究得到了突飞猛进的发展。

由于时滞现象存在于大量的实际系统中，许多实际的奇异系统中也存在着时间滞后和不确定因素，进入 21 世纪以来，许多学者对此产生了浓厚的兴趣，得出了一些有益的成果。Xu 等(2000)提出了广义的有界实引理论(GBL)，通过引入数学上著名的 Barbalat 引理，得出了奇异时滞系统鲁棒稳定与鲁棒二次镇定的充分条件，描述如下：

考虑如下的时滞奇异系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-\tau) \tag{1.3.8}$$

如果存在正定矩阵 Q 和矩阵 P 使得

$$EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\qquad AP^{\mathrm{T}}+PA^{\mathrm{T}}+A_1Q^{-1}PA_1^{\mathrm{T}}+Q<0 \tag{1.3.9}$$

则此系统是鲁棒稳定的。Xu 等(2002a)还研究了具有范数有界不确定性的时滞奇异系统的鲁棒二次镇定的充分条件。Fridman 等(2002，2003)采用矩阵分解的方法，研究了未知时滞的不确定奇异系统的鲁棒 H_∞控制器的设计问题，并且把所得结果与以往的结果进行了比较，得出了使设计的控制器保守性减小的方法。本书的后部分全部是作者关于奇异 Lur'e 系统的研究成果，在第 9 章，通过引入 Xu 等的结果，研究了一类不确定 Lur'e 奇异系统的鲁棒 H_∞控制问题，研究了具有饱和执行器的不确定 Lur'e 时滞奇异系统的鲁棒稳定与鲁棒二次镇定问题，通过奇异系统的处理方法，所得结果与前人文献的比较发现，保守性明显降低。这些研究合理地吸收了前人关于正则系统研究的结果，补充了 Lur'e 奇异系统研究的空白。

由于不确定奇异时滞系统的研究目前正处在一个探索阶段，许多问题目前还没有解决，比如，奇异系统的输出反馈控制器的设计问题，Matlab/Simulink 里的奇异系统仿真问题等。奇异系统的研究成果还远没有形成一个完美的理论体系，需要后来的人不断去探索，去研究，不断推进奇异系统研究的发展。相信在不久的将来，随着正则系统的研究与其他学科的研究进一步的发展，许多新方法会逐步推广到奇异系统中去，许多问题会迎刃而解。

1.4 注 记

本章的主要内容来源于作者的研究成果及相关的参考文献。

参 考 文 献

褚健，蒋培刚，潘红华，苏宏业. 2000a. 一类具有非线性饱和执行器的不确定时滞系统鲁棒控制. 控制与决策，15(1): 23-26.

褚健，苏宏业，蒋培刚. 2000b. 线性不确定时滞系统指定衰减度鲁棒镇定. 自动化学报，26(5): 681-684.

褚健，苏宏业，王景成. 1998. 一类不确定时滞系统的鲁棒 H_∞控制器的设计. 自动化学报， 24(4): 428-431.

褚健，俞立，苏宏业. 2000c. 鲁棒控制理论与应用. 杭州：浙江大学出版社.

褚健，周凯，王景成，苏宏业. 1999. 时滞时变不确定系统的鲁棒输出反馈控制. 自动化学报，25(4): 549-551.

冯纯伯，田玉平，沂欣. 1995. 鲁棒控制系统设计. 南京：东南大学出版社.

冯纯伯. 1990. 非线性控制系统分析与设计. 南京：东南大学出版社.

高为炳. 1991. 非线性控制系统导论. 北京：科学出版社.

高为炳. 1998. 变结构控制的理论及设计方法. 北京：科学出版社.

蒋培刚，苏宏业，褚健. 2000. 线性不确定时滞系统指定衰减度鲁棒镇定. 自动化学报, 26 (5): 681-685.

解学书，钟宜生. 1994. H_∞控制理论. 北京：清华大学出版社.

年晓红. 1995. Lur'e 型控制系统的鲁棒绝对稳定性. 控制理论与应用, 12(5): 613-617.

年晓红. 1996. 高维区间动力系统的稳定性. 控制理论与应用, 13(4): 532-538.

年晓红. 1998. 对称区间矩阵稳定的新充分必要条件. 控制理论与应用, 15(4): 489-493.

年晓红. 1998. 具有多个执行机构的 Lur'e 控制系统的鲁棒稳定性. 自动化学报, 24(4): 562-565.

年晓红. 1998. 具有时滞的线性区间系统的鲁棒稳定性. 控制理论与应用, 15(1): 134-138.

年晓红. 1999a. Lur'e 控制系统的绝对稳定的时滞相关条件. 自动化学报, 25(4): 564-566.

年晓红. 1999b. 具有多个独立执行机构的 Lur'e 控制系统的鲁棒稳定性. 控制理论与应用, 16(1): 12-16.

秦元勋. 1960. 有时滞的系统的无条件稳定性. 数学学报, 10(1): 126-142.

申铁龙. 1996. H_∞控制理论及应用. 北京：清华大学出版社.

苏宏业，褚健，王骥程. 1996. 基于分布变换的离散时滞系统控制器设计及应用. 自动化学报, 22(2): 197-204.

苏宏业，褚健. 1998. 一类不确定时滞系统的稳定化控制其设计研究. 自动化学报, 24(1): 30-36.

苏宏业，蒋培刚，褚健. 2000a. 带饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒镇定. 自动化学报, 26(3): 356-359.

苏宏业，蒋培刚，申屠为农. 2000b. 一类具有非线性不确定性的时滞系统鲁棒控制. 控制理论与应用, 17(6): 949-951.

苏宏业，蒋培刚，王景成，褚健. 1999. 一类不确定性时滞系统的时滞依赖型鲁棒控制器设计. 控制理论与应用, 16(6): 793-796.

苏宏业，王景成，褚健. 1998. 一类不确定动态时滞系统的无记忆鲁棒镇定控制. 自动化学报, 24(4): 497-501.

苏宏业，俞立. 1998. 不确定性时滞系统无记忆鲁棒镇定控制. 控制理论与应用, 15(5): 769-774.

吴冲锋，汪浣尘.1990. 时滞线性系统时滞独立稳定的劳斯-赫尔维茨方法. 控制理论与应用, 7(2): 90-93.

吴敏，桂卫华. 1998. 现代鲁棒控制. 长沙：中南工业大学出版社.

杨斌，潘德惠. 1998. 关于 Lur'e 控制系统的鲁棒绝对稳定性. 自动化学报, 24(6): 816-819.

俞立. 1991. 不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计. 控制理论与应用, 8(1): 68-73.

赵素霞，仵永先. 1995. 绝对稳定性的频率准则. 数学学报, 38(1): 6-12.

赵素霞. 1987. 多个执行部件的控制系统的绝对稳定性. 中国科学[A], 30(8): 785-792.

Ackerman J. 1985. Sampled-Data Control Systems. Berlin: Springer.

Aedema M D. 1974. Singular perturbation in flight mechanics. NASA, TMX-62, 1974.

Aizerman M A. 1949. Research on Nonlinear Control. London: H. M. Stationary Office.

Anderson B D O, Moore J B. 1979. Optimal Filtering. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall.

Ardema M D. 1974. Singular Perturbation in Flight Mechanics. NASA, TMX-62.

Astani K, Iwazumi T, Hattori Y. 1971. Error estimation of prompt jump approximation by singular perturbations theory. J. Nucl. Sci. Technol., 8: 653-656.

Barmish B R. 1989. Ageneralization of Kharitonov's four polynomial concept for stability problem with linearly dependent coefficient perturbations. IEEE Trans. Automat. Contr., 34: 157-165.

Barmish B R.1984. Stabilization of uncertain system via linear control. IEEE Trans. Auto. Contr., AC-28: 848-850.

Barmish B R.1985. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain systems. J. Optim. Theory Appl., 46(4): 399-408.

Bartlett A C, Hollot C V, Huang L.1988. Loop locations for an entire ploytope of polynomials: it suffices to check the edges. Math. for Contr. Sig. and Sys.,1(1), 61-71.

Bellman R E, Cooke K L. 1963. Differential-difference equations. New York:Academic Press

Bernstein D S, Michel A N. 1995. A Chronological bibliography on saturating actuators. Int. J. Robust Nonlinear Contr., 5: 375-380.

Bhattacharyya S P, Chapellat H, Keel L H. 1995. Robust Control: the Parametric Approach. Prentice Hall.

Bhattacharyya S P, Kecl L H. 1991. Control of uncertain dynamic systems. CRC Press, Inc.

Biernacki R M, Hwang H, Bhattacharyya S P.1987.Robust stabilization of plants subject to structured real parameter perturbations. IEEE Trans. Automat. Contr., 32, 495-506.

Bourles H. 1987.Alpha-stability and robustness of large-scale interconnected systems. International Journal of Control. 45(6) : 2221-2232.

Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V.1994. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. SIAM, Philadelphia.

Cgaoui B S, Feron E E, Balakrishnan V. 1994. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia. SIAM.

Chapellat H, Bhattacharyya S P.1989. A generalization of Kharitonov's theorem: robust stability of interval plants. IEEE Trans. Automat. Contr., 34:306-311.

Chen B S, Wang S S. 1988. The stability of feedback control with nonlinear saturating actuator timc domain approach. IEEE Tarns. Automat. Contr., 34(3): 483-487.

Chen M J, Desoer C A.1982. Necessary and sufficient condition for robust stability of linear distributed feedback systems. Int. J. Control, 35(2), 255-267.

Chen S B.1993. The robust optimal control of uncertain system-state space method. IEEE Trans. Auto. Contr., AC-38(6), 951-957.

Choi H H, Chung M J. 1997. An LMI approach to H_∞ controller design for linear time-delay systems. Automatica, 737-739.

Chou J H, Horng L R, Chen B S. 1989. Dynamic feedback compensator for uncertain time-delay systems containing saturating actuator. Int. J. Control, 49:961-968.

Cohen D S. 1974. Mathematical aspects of chemical and biochemical problems and quantum chemistry. SIAM-AMS Proc., American Math. Soc., Providence, RI., 323-335.

Dai L. 1989. Singular Control Systems. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Davison E J. 1976.The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. IEEE Trans. Auto. Contr., AC-21: 25-34.

de Oliveira M C, Bernusson J, Geromel J C. 1999. A new discrete-time robust stability condition. Syst. Control Lett., 37: 261-265.

de Souza C E, Li X, Wang Y. 1993. H_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear systems. Syst. Control Lett., 419-426.

de Souza C E, Li X. 1999. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems. Automatica, 35: 1313-1321.

Doyel J C, Francis B A, Tannenbaum A R. 1992. Feedback Control Theory. New York: Macmillan Publishing Company.

Doyel J C, Glover K, Khargonekar P P. 1989. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 34(8): 831-847.

Doyel J C. 1978. Guaranteed margins for LQG regulators. IEEE Trans. Automat. Contr., 23(4): 756-757.

Doyel J C. 1982. Analysis of control systems with structured uncertainty. IEE Proc. Part D., 129: 242-250.

Doyle J C, Wall J E, Stein G.1982. Performance and robustness analysis for structured uncertainty. Proc. IEEE 1982 CDC, 629-636.

Doyle J C.1984. Lecture Notes in Advances in Multivariable Control. ONR /Honeywell Workshop, Minneapolis.

Dragoslav S et al.1989. Mesomechanical model for brittle deformation processes: Part II. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 56(1): 57-62.

Drazenovic B. 1969. Invariance conditions in variable structure systems. Automatica, 5(3):287-295.

Fridman E, Shaked U, Xie L. 2003. Robust H_∞ filtering of linear systems with time- varying delay. IEEE Trans. Automat. Contr. 159-165.

Fridman E, Shaked U. 2002. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 47: 253-279.

Fridman E. 2001. New Lyapurov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. Syst. Control Lett., 309-319.

Fu M, de Souza C E, Xie L. 2002. H_∞ estimation for uncertain systems. Int. J. Robust Nonlinear Control, 87-105.

Fujita M, Shimenura E. 1998. Integrity against arbitrary feedback-loop failure in linear multivariable control systems. Automatica, 24(6): 765-772.

Gahinet P, Apkarian P, Chilali M. 1996. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 41(3): 436-464.

Gahinet P, Apkarian P. 1994. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. Int. Journal on Robust Nonlinear Control, 4: 421-448.

Gan Z, Ge W, Zhao S, Wu Y. 1999. Robust absolute stability of general Lur'e type nonlinear control systems. Math Application, 12(1): 121-124.

Glover K, Doyle J C.1988. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity. Sys. & Contr. Let., 11: 167-172.

Grujic L T, Petkovski D J. 1987. On robustness of Lur'e system with multiple non-linearities. Automatica, 23(3): 327-334.

Guan Z H, Liu Y Q, Wen X C. 1995. Decentralized stabilization of singular and time-delay large-scale control systems with impulsive solutions. IEEE Trans. Automat. Contr., 40(8): 1437-1441.

Gutman P-O, Hagander P. 1985. New design of constrained controllers for linear systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 30(1): 22-33.

Hale J K. 1973. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag.

Hale J K. 1977. Theory of Functional Differential Equation. New York: Springer-Verlag.

Han Q, Mehdi D. 1999. Robust H_∞ controller synthesis for uncertain time-varying systems with multiple time-varying delays. Proc. 14th IFAC, Beijing, China, 271-276.

Hmamed A.1991. Further results on the robust stability of uncertain time-delay systems. International Journal of Systems Science, 22(3): 605-614.

Hung, J, Gao W, Hung J C. 1993. Variable structure control: a survey. IEEE Trans. Ind. Electron., 40(1):2-22.

Ivan I, Moran B.2001. An approach to robust control of sampled-data systems having finite-dimensional LTI and parametric uncertainties, Proc. 40th CDC, 921-924.

Iwasaki T, Skelton R E. 1994.All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 30: 1307-1317.

Jamshidi M. 1972. A near-optimum controller for cold-rolling mills. Int. J. Control, 16: 1137-1154.

Jamshidi M. 1974. Three-stage near-optimum design of nonlinear control processes. Proc. IEE, 121: 886-892.

Jamshidi M. 1983. Large-Scale Systems Modeling and Control. North-Holland.

Kalman R Z. 1964. When is a linear control system optimal? Trans. ASME, Ser. D, Basic Engr., 86: 51-60.

Kelley H J, Edelbaum T N. 1970. Energy climbs, energy turns and asymptotic expansions. J. Aircraft, 7: 93-95.

Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K.1990. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory. IEEE Trans. Auto. Contr., 35(3):356-361.

Kharitonov V L.1978. Asymptotic stability of an equlibrium position of a family of systems of linear differential equations. Differentsialjnie Uravnenija, 14: 2086-2088.

Kokotovic P V. 1979. Overview of multimodeling by singular perturbations. Systems Engineering for Power: Organizational Forms for Large-Scale Systems, 13-16.

Kolmanonovskii V B, Nosov V R. 1986. Stability of Functional Differential Equations. New York: Academic Press.

Kose I, Jabbari F. 1999. Robust control of linear systems with real parametric uncertainties. Automatica, 679-687.

Kosut R L.1983.Design of linear systems with saturating linear control and bounded states, IEEE Transactions on Automatic Control, 28(1): 121-127.

Krasovskii N N, Lidskii E. 1961. Analytical Design of Controllers in Systems with Random Attributes. Automation and Remote Control Press, London, U. K.: Springer-Verlag.

Krikelis N J, Barkas S K. 1984. Design of tracking systems subject to actuator saturation and integrator wind-up, International Journal of Control, 39(4): 667-682.

Krstic M, Deng H. 1998. Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. London, U.K.: Springer-Verlag.

Lee C Y. 1995.Subspaces and polynomial factorizations over finite fields. Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.6(3):147-148.

Lee, J H, Kim S W, Kwon W H. 1994. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 39: 159-162.

Leitmann G. 1981.Robustness results in linear Gaussian based multivariable control designs. IEEE Trans. Automat. Contr., AC-26: 75-92.

Leitmann G.1979. Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties. ASME J. Dynamical Systems, Measurement and Control, 101: 212-216.

Lewis F L, Syrmos V L. 1991. A geometric theory for derivative feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 36(9): 1111-1116.

Lewis F, Mertzios B. 1987. Analysis of singular systems using orthogonal functions. IEEE Trans. Automat. Contr., 32(6): 527-530.

Liao F, Wang J L, Yang G H. 2002. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach. IEEE Trans on Control Systems Technology, 76-89.

Liao X X. 1989. Necessary and sufficient conditions for absolute stability of Lur'e indirect control systems. Science in China Series A, 32(9): 1047-1061.

Lin J L, Postlethwaite I, Gu D W.1993. μ-k iteration: a new method algorithm for μ synthesis. Automatica, 29: 219-224.

Liu W Q, Yan W Y, Teo K L. 1997. A frequency domain approach to control of singular systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 42(6): 885-889.

Lur'e A I. 1951. On Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control. London: H. M. Stationary Office.

Mahmoud M S, AI-Muthairi, Naser F. 1994. Design of robust controllers for time-delay systems. IEEE Trans.. Automat. Contr., 39(5):995-999.

Masubuchi I, Kamitane Y. 1997. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach. aotomatica, 33: 669-673.

Masubuchi I, Suda N, Ohara A. 1995. LMI-based controller synthesis: a unified formulation and solution. Proc. American Control Conf., 3476-3477.

Michael I G. 1994. Class of absolute stable multivariable system. Int. J. Systems Sci., 25(3): 613-617.

Monopoli P V. 1966. Engineering aspects of control system design via the direct method of Lyapunov. NASA Report,1: 654.

Morari M, Zafiriou E.1989. Robust Process Control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

Mori K.1981. Superconductivity and electrical resistivity saturation in intermetallic compound systems. Jour. Physical Society of Japan, 50(4): 1275-1280.

Mori T. 1985. Criteria for stability of linear time-delay system. IEEE Trans. Automat. Control, 30(6): 158-161.

Newcomb R, Dziurla B. 1989. Some circuits and systems applications of semistate theory. J. Circuits Systems Signal Process, 8(9): 253-259.

Nian X H, Li R F. 2001. Robust stability of uncertain large-scale time-delay systems. Int. J. Systems Sci., 32(4): 541-544.

Niculescu S I, Dion J M, Dugard L. 1994. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Florida, USA, 431-432.

Niculescu S I, Dion J M, Dugard L.1996. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. IEEE Tarns. Automat. Contr., 41(5): 742-747.

Niculescu S I. 2001. Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach. Berlin: Springer-Verlag.

Oucheriah S.1996. Global stabilization of a class of linear continuous time-delay systems with saturating controls, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 43(12): 1012-1015.

Park C W, Kang H J, Yee Y H. 2002. Numerical robust stability analysis of fuzzy feedback linearization regulator based on linear matrix inequality approach. IEE Proc. Control Theory Appl., 149: 82-88.

Park P, Kailath T. 1996. Guaranteed level-H_∞ control in uncertain linear systems via linear matrix inequalities. Int. J. Control, 65(6): 913-924.

Petersen I R, Hollot C V.1986. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica, 22(3), 397-411.

Petersen I R, McFarlane D C.1994. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. IEEE Trans. Auto. Contr., AC-39(9): 1971-1977.

Petersen I R, Hollot C V. 1986. Ricatti equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica, 22(4):397-411.

Petersen I R. 1985. Nonlinear versus linear control in the direct output feedback stabilization of systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 30(8):799-802.

Petersen I R.1987. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. Sys. & Contr. Let In., 8, 351-357.

Petersen I R. 1992. Optimal guaranteed cost control of uncertain linear system. Proc ACC,2: 2929-2930.

Phoojaruenchanachai S, Furuta K. 1992. Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays. IEEE Trans. Automat. Contr., 37(7):1022-1026.

Popov V M, Halanay A. 1962. About stability of nonlinear controlled systems with delay. Automat Remote Control, 23(7): 849-851.

Popov V M. 1961. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. Automat. I. Telmch., 22(12): 961-979.

Rachid A.1989. Robustness of discrete systems under structured uncertainties. Int. J. Contr., 50: 1563-1566.

Ramirez-sosa M, M I, Tores-Munoz J A, Kharitonov V L. 1999. On multivariate zero exclusion principle: application to stability radius, in Proc. Conf. Decision and Control, 5:4531-4536.

Rapopert L B. 1987. Problem of absolute stability of control systems with several nonlinear stationary compositions. Automat. Telemekh., 5: 66-74.

Rosenbrock H H.1972. The stability of multivariable systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 17: 105-107.

Safonov M G. 1980.Stability and robustness of multivariable feedback systems. The MIT Press.

Schoen G M, Geering H P. 1995. A note on robustness bounds for large-scale time-delay systems. Int. J. Systems Sci., 26: 2441-2444.

Shen J C, Chen B S, Kung F C. 1991. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 36(5): 638-640.

Shen J C, Kung F C. 1989. Stabilization of input-delay systems with saturating actuators. Int. J. Control, 50: 1667-1680.

Shy D S, Yan J S. 1993.Phase behavior of methane with carboxylic acids. Journal of Chemical and Engineering Data, 38(1): 112-115.

Soch C B. 1990. Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices. Int. J. Control, 51: 243-248.

Somolines A. 1877. Stability of Lur'e-type functional equations. J. Diff. Euations, 26(2): 191-199.

Su H Y, Chu J, Wang J C, Wang S Q, Yu L. 1997. Robust stabilizing control for a class of uncertain time-delay systems with output feedback. IFAC Sym. Advanced Control in Chemical Process (ADCHEM)'97, Banff, Canada, 149-154.

Su H Y, Chu J, Wang J C. 1998. A memoryless robust stabilizing control for a class of uncertain linear time-delay systems. Int. J. Systems Sci., 29(2): 191-197.

Su H Y, Chu J. 1999. Stabilization of a class of uncertain time-delay systems containing saturating actuators. Int. J. Robust Nonlinear Contr., 30: 1193-1203.

Su H Y, Lam J, Chu J. 1999. Robust controller design for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. 14th IFAC'1999, Beijing, 145-150.

Su H Y, Liu F, Chu J. 2001. Robust stabilization of uncertain time-delay systems containing saturating actuators. IEE Proc. Control Theory Appl., 148: 323-328.

Su H Y, Wang J C, Yu L, Chu J. 1997. Dynamic output feedback stabilizing control for linear time-varying uncertain systems with delayed state and control. Proc. 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California, USA, 4562-4567.

Su H Y, Wang J C, Yu L. 1997. Robust memoryless H_∞ controller design for a class of time-varying uncertain linear time-delay systems. Proceeding of ACC'97. Albuquerque NM, USA, 3662-3663.

Su T J, Lu C Y, Tsai J S H. 2001. LMI approach to delay-dependent robust stability for uncertain time-delay systems. IEE Proc. Control Theory Appl., 148: 209-212.

Sun W, Nagpal K M, Khargonekar P P. 1993. H_∞ control and filtering for sampled-data systems. IEEE Trans. Automa. Control, 38: 1162-1175.

Sun Y J et al.1997a. On the stability of uncertain systems with multiple time-varying delays. IEEE Trans. Auto. Contr., 42(1): 101-105.

Sun Y J, Hsieh J G, Yang H C. 1997b. On the stability of uncertain systems with multiple time-vary delays. IEEE Trans. Automat. Control, 42: 101-105.

Tarbouriech S, Garcia G. 1997. Control of Uncertain Systems with Bounded Input. Lecture Notes in Contr. and Inform. Sci., London, U. K.: Springer-verlag.

Tarbouriech S, Gomes J M, de Silva J R. 2001. Synthesis of controllers continuous-time delay systems with saturating controls via LMI's. IEE Proc. Control Theory Appl., 148: 123-130.

Tarbouriech S, Peres P L, Garcia D G, Queinnec I. 2002. Delay-dependent stabilization and disturbance tolerance for time-delay systems subject to actuator saturation. IEE Proc. Control Theory Appl., 149: 387-393.

Tesi A, Vicino A. 1991. Robust absolute stability of Lur'e control systems in parameter space. Automatica, 27(1): 147-151.

Thowsen A. 1983. Uniform ultimate boundedness of the solutions of uncertain dynamic delay systems with state-dependent and memoryless feedback control. Int. J. Control, 37(5):1135-1143.

Trinh H, Aldeen M. 1997. On robustness and stabilization of linear systems with delays nonlinear perturbations. IEEE Trans. Automat. Contr., 42(7): 1005-1007.

Tsay S C. 1990. Robust control for linear uncertain systems via linear quadratic state feedback, Syst. Contr. Lett., 15: 190-205.

Utkin G I. 1977. Automatic ellipsometer with linear two-coordinate scanning. Instruments and Experimental Techniques (English Translation of Pribory I Tekhnika Eksperimenta), 20(1): 244-247.

Vassilaki M, Hennet J C, Bitsoris G. 1988. Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints. International Journal of Control, 47(6): 1727-1735.

Veillette R J, Mcdanic J V, Perkins W R. 2000. Design of reliable control systems. IEEE Trans Automat Contr., 45: 1215-1221.

Verghese G C, Levy B C, Kailath T. 1981. A generalized state-space for singular system. IEEE Trans Automat Contr., 26: 811-831.

Vidyasagar M, Kimura H. 1986. Robust controllers for uncertain linear multivariable systems. Automatica, 22: 85-94.

Vidyasagar M, Viswanadham N.1982. Algebraic design techniques for reliable stabilization. IEEE Trans. Automat. Contr., 27: 1085-1095.

Vidyasagar M. 1987. Robust stabilization relative to the unweighted H_∞ norm is generically unattainable in the presence of singular plant perturbations. IEEE Trans. Automat. Contr., 32(1): 51-53.

Wang C M. 1987.Optimization of multispan plane prager-structures with variable support locations. Engineering Structures, 9(3): 157-161.

Wang J C, Su H Y, Chu J. 1998. Robust H_∞ controller design for linear time-varying uncertain systems with delayed state and control. Proc. Amer. Conf. ,Philadelphia, USA, 2410-2414.

Wang W J, Song C C, Kao C C. 1991. Robustness bounds for large-scale with structure and unstructured uncertainties. Int. J. Systems Sci., 22: 209-216.

Wang Y Y, Xie L H, de Souza E. 1992. Robust control of uncertain nonlinear systems. Systems & Control Letters, 19: 139-149.

Wang Z D, Chen X M, Guo Z. 1995. Controllers design with variance and circular pole constraints for continuous time systems. International Journal of Systems Science, 20(5): 1249-1256.

Wassim W H, Vikram K. 1995. Absolute criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities. IEEE Trans. Automat. Control, 40: 361-363.

Wonham W. 1979. Algebro-geometric and lie-theoretic techniques in systems theory, part A: Interdisciplinary mathematics. IEEE Trans. Automat. Contr., 24(3): 519-520.

Wu H, Mizaukaim K. 1995. Robust stability criteria for dynamical systems with delayed perturbations. IEEE Trans. Automa. Control, 40: 487-490.

Wu Y X, Zhao S X. 1991. Absolute stability of a control system with several nonlinear stationary elements in the case of an infinite sector. Automat. Telemekh., 1: 34-42.

Xu S, Chen T. 2003. Robust H_∞ filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements. Automatica, 39: 509-516.

Xu S, Dooren P V, Lam J. 2002a. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty. IEEE Trans. Automa. Control, 47: 1122-1128.

Xu S, Lam J, Yang C. 2002b. Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty. Dyna. Continuous, Discrete, Impul. Syst.

Xu S, Lam J, Zhang L. 2002c. Robust D-stability analysis for uncertain discrete singular systems with state delay. IEEE Trans. Circuits Syst. I., 49: 551-555.

Xu S, Yang C. 2000. An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems. Int. J. Syst. Sci., 31: 55-61.

Yang G H, Lam J, Wang J L. 1998. Reliable H_∞ control for affine nonlinear systems. IEEE Trans Automat Contr, 43: 1112-1117.

Yang G H, Wang J L, Lin C. 2000. H_∞ control for linear systems with additive controller gain variations. Int. J. Control, 73(16): 1500-1506.

Yang G H, Wang J L, Soh Y C. 2000. Reliable LQG control with sensor failures. IEE. Proc. Control Theory Appl., 147(4): 433-439.

Yang G H, Wang J L, Soh Y C. 2001. Reliable H_∞ controller design for linear systems. Automatica, 37: 491-493.

Yang G H, Wang J L, Soh Y C. 2001. Reliable H_∞ controller design for linear systems. Automatica, 37(4): 717-725.

Yang Y, Yang G H, Soh Y C. 2000. Reliable control of discrete-time systems with actuator failures. IEE. Proc. Control Theory Appl., 147(4): 428-432.

Ye H, Michel A N, Hou L. 1998. Stability analysis of systems with impulse effects. IEEE Trans. Automa. Control, 43: 1719-1723.

Yedavalli R K. 1993. Quadratic stabilization of linear uncertain systems in convex-bounded domains. Automatica, 29(2): 491-493.

Youla D C, Bongiorno J J, Jabr H A.1976.Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers—part I. the single input-output case. IEEE Trans. Auto. Contr., AC-21: 3-13.

Yu L, Chen G D. 1999. Memoryless stabilization of uncertain linear systems with time-varying state and control delays. Advan. Mod. Ana., Series C, 27-34.

Yu L, Chu J, Su H Y. 1996. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty. Automatica, 32(12): 1759-1762.

Yu L, Chu J. 1999. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. Automatica, 35(6): 1155-1160.

Zames G, Francis B A.1983. Feedback, mini-max sensitivity and optimal robustness. IEEE Trans. Auto. Contr., AC-28: 585-601.

Zames G. 1963. Functional analysis applied to nonlinear feedback systems. IEEE Trans. Circ. Syst-I. 10: 392-404.

Zames G. 1981. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. IEEE Trans. Auto. Contr., 26(2):301-320.

Zhao Q, Jiang J. 1998. Reliable state feedback control system design against actuator failures. Automatica, 34(10): 1267-1272.

Zhou K, Doyle J C. 1998. Essentials of Robust Control. New Jersey: Prentice Hall.

Zhou K, Glover K, Bodenheimer B, Doyle J C.1994. Mixed H_2 and H_∞ performance objectives I: robust performance analysis, IEEE Trans. Automat. Contr. AC-39:1564-1574.

Zhou K, Khargonekar P P.1988. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. Sys. & Contr. Let., 11: 85-91.

Zhou K, Khargonekar P P. 1998. Robust stabilization of Linear systems with norm bounded time varying uncertainty. Syst. Contr. Letter, 10: 17-20.

第 2 章　数学基础与预备知识

2.1　矩阵论基础

一组 $m\times n$ 个数排成 m 行 n 列(横称为行，纵称为列)的矩阵阵列(表)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

称为维数为 $m\times n$ 的矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，常用单个大写字母表示，如 A, B 等。

对于一个给定的矩阵 A，可以在行间作水平线，或(及)在列间作垂直线，把矩阵划分成一些块，称为对矩阵 A 的分块，例如，如果下面的 3×5 的矩阵 A，可以被虚线分成四块

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

可以看出 A_{11} 是个 2×3 的矩阵。矩阵的分块可以显示其简单的结构，从而有可能利用已知的性质，简化运算与讨论。如利用按列分块的形式，可以把逆矩阵的计算与解特定的线性代数方程组联系起来。

给定矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，其中 A_{11} 和 A_{22} 是方阵。假定 A_{11} 是非奇异的，则 A 可有如下的对角分解形式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & \Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

其中，$\Delta=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$，同时，$A$ 是非奇异的当且仅当 Δ 是非奇异的。

同理，如果 A_{22} 是非奇异的，则有

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

其中，$\hat{\Delta}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$，并且，$A$ 是非奇异的当且仅当 $\hat{\Delta}$ 是非奇异的。

如果 A 是非奇异的，进一步有如下的求逆公式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}\Delta^{-1}A_{21}\Delta^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.1.5}$$

和

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}^{-1} & -\hat{\Delta}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}\hat{\Delta}^{-1} & A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}A_{21}\hat{\Delta}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.1.6}$$

如果 A 本身具有块对角形式时，可以得到以下的简化形式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.1.7}$$

和

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.1.8}$$

如果矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 是非奇异的，则 A_{11} 和 $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 是非奇异的，这时有

$$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \tag{2.1.9}$$

特别地，如果对 A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22} 取一些特定的值，则得如下的引理。

引理 2.1.1 如果对于任意的非奇异矩阵 A 与任意两个矩阵 B 和 C，且矩阵 $(A+BC^{\mathrm{T}})$ 与 $(I+C^{\mathrm{T}}A^{-1}B)$ 都是非奇异的，则矩阵恒等式

$$(A+BC^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(I+C^{\mathrm{T}}A^{-1}B)^{-1}C^{\mathrm{T}}A^{-1} \tag{2.1.10}$$

成立。该引理又称为矩阵求逆引理。

对于分块矩阵的行列式的值，有以下等式成立：

如果 A_{11} 非奇异，则有

$$\det A=\det A_{11}\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \tag{2.1.11}$$

如果 A_{22} 非奇异，则有

$$\det A=\det A_{22}\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \tag{2.1.12}$$

证明　因为有

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}-A_{11}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.1.13}$$

因此显然有

$$\det A \det A_{22}^{-1}=\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \tag{2.1.14}$$

且因 $\det A_{22}^{-1}=\dfrac{1}{\det A_{22}}$，所以式(2.1.12)显然成立，同理可以证明式(2.1.11)也成立。

特别地

$$\det\begin{bmatrix} I_m & B \\ -C & I_n \end{bmatrix}=\det(I_n+CB)=\det(I_m+BC) \tag{2.1.15}$$

如果 $x,y\in R^n$ 则式(2.1.15)退化为 $\det(I_n+xy^{\mathrm{T}})=1+y^{\mathrm{T}}x$。

在控制理论中，我们已经用到矩阵正定的概念。一个矩阵称为是正定的，如果对于任意的向量 $x\neq 0$，都有 $x^{\mathrm{T}}Px>0$ 成立，正定矩阵有如下几个性质：

(1) 如果矩阵 P 的特征值都是整数，则 P 是正定的，记做 $P>0$；

(2) 如果 $P>0$，则 P 的对角线元素都大于零；

(3) 如果 Q 是非奇异矩阵，且有 $P>0$，则 $Q^{\mathrm{T}}PQ$ 也是正定的；

(4) 如果 $P>0$，则 P^{-1} 存在，且有 $P^{-1}>0$；

(5) 如果 $P>0$，则从 P 中去掉一行及其对应的列所得到的矩阵仍然正定；

(6) 如果 $P>0$，则 $\rho(i,j)\overset{\text{def}}{=\!=}p(i,j)\big/\sqrt{p(i,i)p(i,j)}$ 的绝对值都小于 1，其中 $i\neq j$。

在研究线性系统的 D 稳定性时，经常要用Kronecker积与Kronecker和的概念。给定矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 和 $B\in R^{p\times q}$，则 A 与 B 的 Kronecker 积定义为

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}\in R^{mp\times nq} \tag{2.1.16}$$

矩阵的 Kronecker 积又称为(直积和张量积)，简记为 $A\otimes B=(a_{ij}B)$。很显然，$A\otimes B$ 和 $B\otimes A$ 是同阶矩阵，但是一般说来 $A\otimes B\neq B\otimes A$。

如果矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 和 $B\in R^{m\times m}$，则 A 与 B 的 Kronecker 和可以定义为

$$A \otimes B = (A \otimes I_m) + (I_n \otimes B) \in R^{mn \times mn} \tag{2.1.17}$$

假设，$A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$，记 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})^{\mathrm{T}}$，$i = 1, 2, \cdots, n$。令

$$\mathrm{Vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{2.1.18}$$

则称 $\mathrm{Vec}(A)$ 为矩阵 A 的列拉直(列展开)，同样可以定义矩阵的行展开。

容易得到，对于矩阵 $A \in R^{m \times n}$，$X \in R^{n \times p}$，$B \in R^{p \times q}$，则

$$\mathrm{Vec}(AXB) = (B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{Vec}(X) \tag{2.1.19}$$

如果取 $m = n$ 和 $p = q$，则有 $\mathrm{Vec}(AX + XB) = (B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{Vec}(X)$。在控制理论中，我们经常需要求解形如 $AX + XB = C$ 的矩阵方程，其中 $A \in R^{n \times n}$，$B \in R^{m \times m}$，$C \in R^{n \times m}$，在求解这个方程的时候，我们就可以通过 Kronecker 积写成如下的等价形式：

$$(B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C) \tag{2.1.20}$$

注意到方程(2.1.20)具有唯一解，当且仅当 $(B^{\mathrm{T}} \otimes A)$ 是非奇异的。

2.2　Riccati 方程与线性矩阵不等式

2.2.1　Riccati 方程

在鲁棒控制问题的研究中，我们常常会碰到以下形式的 Riccati 方程：

$$A^{\mathrm{T}} X + XA + XRX + Q = 0 \tag{2.2.1}$$

其中，$A \in R^{n \times n}$ 为已知的常数矩阵，R 和 Q 是适当维数的实对称矩阵，从这个方程不难得到以下的关系式：

$$\begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} (A + RX) \tag{2.2.2}$$

其中，I 为适当维数的单位矩阵，定义 $2n \times 2n$ 的矩阵

$$H=\begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

具有这样形式的矩阵称为是 Riccati 方程的 Hamilton 矩阵，从式(2.2.2)容易看到，如果存在某个矩阵 X，使得$\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$是矩阵 H 的一个不变子空间，且 $A+RX$ 刻画了矩阵 H 在该不变子空间上的表示，则矩阵 X 就是 Riccati 方程的一个解。

Hamilton 矩阵在求解 Riccati 方程(2.2.1)中起着重要的作用，并且，它还有以下重要的性质。

引理 2.2.1　Hamilton 矩阵 H 的谱集 $\sigma(H)$ 是关于虚轴对称的。

证明　定义矩阵 $J=\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$，则通过分块矩阵的乘法，可以得到

$$J^{-1}HJ=\begin{bmatrix} -A^{\mathrm{T}} & Q \\ -R & A \end{bmatrix}=-H^{\mathrm{T}} \tag{2.2.4}$$

即 H 和 $-H^{\mathrm{T}}$ 是相似的。因此，如 λ 是 H 的一个特征值，则 $-\lambda$ 也是 H 的一个特征值。由于 H 是一个实数集合，故 $-\bar{\lambda}$ 也是 H 的一个特征值，因此得证引理。

以下的定理给出了用 Hamilton 矩阵 H 的不变子空间来构造 Riccati 方程(2.2.1)的解的方法。

引理 2.2.2　设 $V\in C^{2n}$ 是矩阵 H 的一个 n 维不变子空间，$X_1,X_2\in C^{n\times n}$ 是两个复矩阵，且使得

$$V=\mathrm{Im}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

如果 X_1 是可逆的，则 $X=X_2X_1^{-1}$ 是 Riccati 方程(2.2.1)的解，且 $\sigma(A+RX)=\sigma(H|_v)$，进而，这样得到的解 X 不依赖于 V 中基的特殊选取。

反之，如果 $X\in C^{n\times n}$ 是 Riccati 方程(2.2.1)的解，则存在矩阵 $X_1,X_2\in R^{n\times n}$，其中 X_1 是可逆的，使得 $X=X_2X_1^{-1}$ 且矩阵$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$的列向量张成 H 的一个 n 维不变子空间。例如，设 $A=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则矩阵的 H 的特征值为 $1, 1, -1, -1$。和 1 对应的特征向量和广义特征向量为

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\2\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}-1\\-3/2\\1\\0\end{bmatrix}$$

和特征值−1 对应的特征向量和广义特征向量分别是

$$v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\3/3\\0\\0\end{bmatrix}$$

因此，Riccati 方程的解可以通过以下的方式构造得到：

$\mathrm{span}\{v_1,v_2\}$ 是矩阵 H 的一个不变子空间，设 $\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=\{v_1,v_2\}$，则

$$X=X_2X_1^{-1}=\begin{bmatrix}-10&6\\6&-4\end{bmatrix}$$

2.2.2　线性矩阵不等式

由于目前许多控制系统分析设计问题及特殊约束条件都可转化为一组线性矩阵不等式的可行性问题来处理，考虑到无须参数调整给应用带来了极大的方便，因而以线性矩阵不等式为工具进行研究工作越来越成为目前控制理论界的潮流，出现了许多求解线性矩阵不等式的工具软件。特别地，近年来，线性矩阵不等式被广泛用来解决系统与控制中的一些问题，并随着解决线性矩阵不等式的内点法的提出以及 Matlab 中 LMI 工具箱的推出，而越来越受到人们的关注和重视。

本节简单介绍一下线性矩阵不等式的有关知识，首先我们给出线性矩阵不等式的定义。

定义 2.2.1　下面的矩阵不等式称为线性矩阵不等式或严格线性矩阵不等式

$$F(x)=F_0+\sum_{i=1}^{m}x_iF_i\leqslant 0 \tag{2.2.6}$$

其中，$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是未知变量，称为线性矩阵不等式的决策变量，$x=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^{\mathrm{T}}\in R^m$ 为由决策变量构成的向量，成为决策向量。$F_i=F_i^{\mathrm{T}}\in R^{n\times m},i=0,1,\cdots,m$ 是给定的对称矩阵。$F(x)\leqslant 0$ 表示 $F(x)$ 是半负定的，即对于任意的非零向量 $u\in R^n$ 有不等式 $u^{\mathrm{T}}F(x)u\leqslant 0$ 成立。如下式成立：

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i < 0 \tag{2.2.7}$$

则称为严格线性矩阵不等式。

在许多的系统与控制问题中，问题的变量是以矩阵出现的，例如，Lyapunov 方程

$$F(X) = A^{\mathrm{T}} X + XA + Q < 0 \tag{2.2.8}$$

其中，$A, Q \in R^{n\times n}$ 是给定的常数矩阵，且 Q 是对称的，$X \in R^{n\times n}$ 是对称的未知矩阵变量，因此该矩阵不等式中的变量是一个矩阵。设 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ 是 S^n 中的一组基，则对任意对称矩阵 $X \in R^{n\times n}$，存在一组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 使得 $X = \sum_{i=1}^{m} x_i E_i$。因此

$$\begin{aligned} F(X) = F\left(\sum_{i=1}^{m} x_i E_i\right) &= A^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i E_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i E_i\right)^{\mathrm{T}} A + Q \\ &= x_1(A^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 A) + \cdots + (A^{\mathrm{T}} E_m + E_m A) + Q \\ &< 0 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

线性矩阵不等式(2.2.9)是关于变量 x 的一个凸约束，所以集合 $\{x | F(x) < 0\}$ 是一个凸集，线性矩阵不等式的求解从而可转化成为凸优化问题的求解。内点法、椭球法等是求解线性矩阵不等式的有效方法。详细内容可见参考文献(Boyd et al., 1994)。控制理论研究中经常遇到二次矩阵不等式，通过下面的 Schur 引理可以转化为线性矩阵不等式，这也是线性矩阵不等式在控制理论研究中能得到广泛应用的主要原因之一。

引理 2.2.3(Schur 引理) 假设对称矩阵 $F = F^{\mathrm{T}} \in R^{(n+m)\times(n+m)}$ 的分块表示为

$$F = \begin{bmatrix} A & B^{\mathrm{T}} \\ B & C \end{bmatrix} \tag{2.2.10}$$

其中，$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{m\times m}$。则以下两个结论等价：

结论 a: C 是非奇异的，则 $F > 0$ 的充分必要条件是 $C > 0$ 且 $A - B^{\mathrm{T}} C^{-1} B > 0$。

结论 b: A 是非奇异的，则 $F > 0$ 的充分必要条件是 $A > 0$ 且 $C - B^{\mathrm{T}} A^{-1} B > 0$；

引理 2.2.4 假设对称矩阵 $F = F^{\mathrm{T}} \in R^{(n+m)\times(n+m)}$ 的分块表示为

$$F = \begin{bmatrix} A & B^{\mathrm{T}} \\ B & C \end{bmatrix} \tag{2.2.11}$$

其中，$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{m\times m}$。则 $F \geqslant 0$ 等价于以下三个约束条件：

$$C \geqslant 0,\quad A - B^{\mathrm{T}} C^{-1} B \geqslant 0,\quad B^{\mathrm{T}}(I - CC^{-1}) = 0 \tag{2.2.12}$$

其中，C^{-1} 表示矩阵 C 的 Moore-Penrose 逆。

线性矩阵不等式的最大优点就是其计算的简单性，并且无须参数调整。目前已经出现了许多求解线性矩阵不等式的优秀工具软件，例如，最常用的 Matlab/LMI Toolbox 等。只要编写一些相关的函数，就很容易快捷地通过 Matlab 求解。下面的引理给出了一些常用的矩阵不等式关系。

(1) feasp 函数。

对如下的线性矩阵不等式：

$$A(x) < B(x) + \lambda I \tag{2.2.13}$$

feasp 将在上面的约束下搜索决策变量 x，使得满足上式的 λ 最小化，显然，最终如果 $\lambda_{\min} < 0$，则线性矩阵不等式 $A(x) < B(x)$ 有解，且对应的 x 即为一组可行解。

(2) mincx 函数。

在线性矩阵不等式约束

$$A(x) < B(x) \tag{2.2.14}$$

下最小化 $c^{\mathrm{T}} x$，其中 c 是决策系数，x 为决策变量。

(3) gev 函数。

求解如下的广义特征值问题：

$$\begin{gathered} C_1(x) < 0 \\ \vdots \\ C_m(x) < 0 \\ A_1(x) < \lambda B_1(x) \\ \vdots \\ A_n(x) < \lambda B_n(x) \end{gathered}$$

gev 函数给出在以上约束有界时 λ 的最小值。

引理 2.2.5 假设 x 和 y 是具有适当维数的向量，则下述不等式成立：

$$2x^{\mathrm{T}} y \leqslant x^{\mathrm{T}} Q x + y^{\mathrm{T}} Q^{-1} y$$

其中，Q 是任意具有适当维数的正定矩阵。

引理 2.2.6 假设 A、D、E 和 F 为适当维数的实矩阵，且 $F^{\mathrm{T}} F \leqslant I$，则对任意的向量 $\varepsilon > 0$，下述不等式成立：

$$DFE + E^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} \leqslant \varepsilon D D^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1} E^{\mathrm{T}} E$$

引理 2.2.7(Wang et al., 1992)　假设 A、D、E 和 F 为适当维数的实矩阵，且 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$，对任意的对称矩阵 $P>0$ 及标量 $\varepsilon>0$，下述两个结论都成立：

(1) 如果有 $\varepsilon I - EPE^{\mathrm{T}} > 0$，则

$$(A+DFE)P(A+DFE)^{\mathrm{T}} \leqslant APA^{\mathrm{T}} + APE^{\mathrm{T}}(\varepsilon I - EPE^{\mathrm{T}})^{-1}EPA^{\mathrm{T}} + \varepsilon DD^{\mathrm{T}}$$

(2) 如果有 $P - \varepsilon DD^{\mathrm{T}} > 0$，则

$$(A+DFE)^{\mathrm{T}}P^{-1}(A+DFE) \leqslant A^{\mathrm{T}}(P-\varepsilon DD^{\mathrm{T}})^{-1}A + \varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E$$

引理 2.2.8(Kulkami et al., 2002)　如果存在对称正定阵 $P>0$ 和矩阵 A，满足 $A^{\mathrm{T}}PA - P < 0$，当且仅当存在对称矩阵 G 使下述不等式成立：

$$\begin{bmatrix} P & A^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} \\ GA & G+G^{\mathrm{T}}-P \end{bmatrix} > 0$$

引理 2.2.9　假设 $x_i, i=1,2,\cdots,n$ 是具有适当维数的向量，则对任意正整数 n，下述不等式成立：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mathrm{T}} x_i\right)$$

引理 2.2.10(Zhou et al.，1988)　假设 A、D 和 E 是具有适当维数的矩阵，则下述两个提法等价：

(1) A 是一稳定矩阵，并且满足 $\left\|E(sI-A)^{-1}D\right\|_{\infty} < 1$；

(2) 存在一正定对称矩阵 $X>0$ 满足条件

$$A^{\mathrm{T}}X + XA + XDD^{\mathrm{T}}X + E^{\mathrm{T}}E < 0$$

2.3　系统稳定性理论

稳定性是控制理论和控制设计中的一个基本问题，控制理论中存在着许多不同类型的稳定性问题的提法。其中工程上比较关心的是系统在平衡点附近的一类稳定性问题。这通常可以用 Lyapunov 函数来刻画。

Lyapunov 稳定性的定义如下。

考虑下述微分方程：

$$\dot{x}(t) = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.3.1}$$

其中，$x \in R^n$ 为系统的状态，$t \in J=[t_0,\infty]$,$f:B(r)\times J \to R^n$，$B(\varepsilon)=\{x\in R^n:\|x\|\leqslant\varepsilon\}$(对于某一 $\varepsilon>0$)，并假设 f 足够光滑，对每个 $x_0 \in B(\varepsilon)$ 和 $t_0 \in R^+,R^+=[0,\infty)$ ，该方程有且仅有一个解 $x(t;x_0,t_0)$ 对所有的 $t\in J$ 成立。当 $f(x,t)$ 不是 t 的显函数时，称为自治系统，或称为时不变系统；否则成为非自治系统，或称为时变系统。如果 $f(x,t)=A(t)x$ 对于某一矩阵 $A(t):R^+\to R^{n\times n}$，则称为线性系统，否则称为非线性系统，显然，线性时不变系统是自治的，而线性时变系统是非自治的。

显然， $\dot{x}(t)=f(x,t)$ 不包含输入变量 $u(t)$ ，如果控制变量包含在式子的 $f(x,u,t)$ 中，则将该系统称为控制系统，讨论的特性也可以直接应用于控制系统的反馈设计。可以看出，如系统的控制输入 $u(t)$ 为状态和时间的函数时，系统实际上表示了反馈控制系统的闭环动态特性。假设系统给定为

$$\dot{x}(t)=f(x,u,t),\qquad x(t_0)=x_0 \tag{2.3.2}$$

并假定状态反馈控制律为

$$u(t)=g(x,t) \tag{2.3.3}$$

则闭环系统为

$$\dot{x}(t)=f(x,g(x,t),t),\qquad x(t_0)=x_0 \tag{2.3.4}$$

可见，系统(2.3.2)可以写成(2.3.1)的闭环系统的形式。

考虑时滞系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=f(t,x_t),\qquad t\geqslant t_0\\&x_{t0}(\theta)=\phi(\theta),\qquad \forall\theta\in[-d,0]\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

其中， $x_t(\cdot)$ 表示对给定的 $t\geqslant t_0$ ，

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\qquad \forall\theta\in[-d,0] \tag{2.3.6}$$

为了叙述简便，引入如下记号： $C_{n,d}=C([-d,0],R^n)$ 表示将区间 $[-d,0]$ 映射到 R^n 的连续向量值构成的 Banach 空间； $\|\phi\|_\infty=\sup_{-d\leqslant t\leqslant 0}\|\phi\|$ 表示函数 $\phi\in C_{n,d}$ 的范数，其中 $\|\cdot\|$ 为 Euclidean 范数集合 $C_{n,d}^v=\{\phi\in C_{n,d}\|\phi\|_\infty<v\}$，其中 v 为正实数。

假设 $\phi\in C_{n,d}$ ，映射 $f(t,\phi)=:R^+\times C_{n,d}^v\to R^n$ 是连续的且关于 ϕ 满足 Lipschitz 条件，且有 $f(t,0)=0$ 。并令 $x(t_0,\phi)$ 表示在初始条件 $(t_0,\phi)\in R^+\times C_{n,d}^v$ 下，泛函微分方程(2.3.5)的解。则有如下定义：

定义 2.3.1 如果下列条件成立，则称方程的零解 $x(t)=0$ 是一致渐进稳定的。

(1) 对每一个 $\varepsilon>0$ 和每一个 $t_0 \geqslant 0$，存在与 t_0 无关的 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对任意 $\phi \in C_{n,d}^{\delta}$，方程(2.3.5)的解 $x(t_0,\phi)$ 对所有 $t \geqslant t_0$ 满足 $x_t(t_0,\phi) \in C_{n,d}^{\varepsilon}$。则根据定义，$x_t(t_0,\phi)(\cdot)$ 表示 $x_t(t_0,\phi)(\theta)=x_t(t_0,\phi)(t+\theta)$。

(2) 对每一个 $\eta>0$ 和每一个 $t_0 \geqslant 0$，存在与 t_0 无关的 $T(\eta)$ 和与 η 和 t_0 无关的 $v_0>0$，使对任意的 $\phi \in C_{n,d}$，$\|\phi\|_{\infty}<v_0$ 隐含 $\|x_t(t_0,\phi)\|_{\infty}<\eta,\ \forall t \geqslant t_0+T(\eta)$。

其中条件(1)是一般的稳定性定义，条件(2)为渐进稳定性的定义。

令 $V_i(\cdot), i=1,2,3$ 表示连续非减标量函数，且具有如下性质：

$$V_i(x)>0,\quad \forall x \neq 0,\quad V_i(0)=0,\quad i=1,2,3 \tag{2.3.7}$$

定理 2.3.1(Lyapunov-Krasovskii 定理) 考虑泛函微分方程(2.3.5)。设存在连续泛函 $V(x)$ 满足：

(1) $V_1(\|\phi(0)\|) \leqslant V(t_0,\phi) \leqslant V_2(\|\phi(\theta)\|)$。

(2) $\dot{V}(t,x_t) \leqslant -V_3(\|x(t)\|)$，其中 $\dot{V}(t,x_t)$ 表示 $V(t,x_t)$ 沿着方程(2.3.5)的解轨迹的时间导数，则方程(2.3.5)的零解是一直渐进稳定的。

定理 2.3.2 (Lyapunov-Razumikhin 定理) 考虑泛函微分方程(2.3.5)，设 $V(t,x_t)$ 为一连续函数，$P(t)$ 为一增函数且有 $P(t)>0$，如果

$$V(\varsigma,x_{\varsigma})<P(V(t,x_t)),\qquad \varsigma \in [t-h,t],\qquad t>t_0 \tag{2.3.8}$$

得到满足时有

$$\dot{V}(t,x_t) \leqslant -\gamma(\|x\|)+2\varepsilon \tag{2.3.9}$$

成立，其中 ε 为一大于零的常数，且有 $2\varepsilon<\lim\limits_{r\to 0}\gamma(r):=\ell$，则系统是稳定的。

2.4 鲁棒控制理论基础

任何数学模型都只能是实际物理系统的一个近似，模型误差的存在必然会降低控制系统的性能。鲁棒控制就是为了定量地考察这种由于系统的模型误差对控制系统性能上的影响。其基本思路是假定对象的模型属于一个集合，而这个集合把模型误差引起的系统参数不确定性包括其中。系统的鲁棒性就是指控制系统的某些特性对于集合中的每一个对象是否都是成立的，例如，集合中的每一个对象都是稳定的，称该系统为鲁棒稳定的，如果集合中的每一个对象都具有指定的性能指标，就称该系统具有指定的鲁棒性能指标。

对不确定性的描述通常可以分为结构化和非结构化两种，前者一般指系统存

在有限个不确定参数，主要用来描述参数不确定性，而后者则相反，系统的不确定性很难归结为系统某个或某些参数的摄动，一般用来描述未建模动态(也称为动态不确定性)。一般来讲结构化不确定性提供的信息更具体，因而保守性更小。实际上结构化不确定性模型可以嵌入到非结构化模型中。一个典型的不确定控制系统可以用图 2.4.1 来描述。

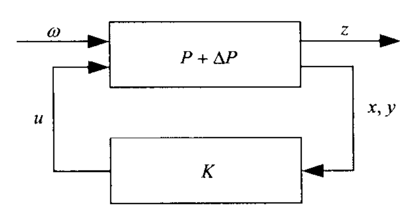


图 2.4.1　不确定对象控制系统结构图

结构化不确定性在控制系统的频域分析方法中应用较多，主要有如下几种类型：

$$(1+\Delta W)P, \quad P+\Delta W, \quad P/(1+\Delta W), \quad P/(1+\Delta WP) \tag{2.4.1}$$

其中，Δ为范数有界的传递函数，W 为不确定性的加权矩阵，一般说来，它描述不同的频率特征，一般说来，W 的高频幅值要比低频的幅值要大。

由于本书主要使用时域办法研究用状态空间描述的线性不确定时滞系统，因此下面重点介绍一下状态空间描述的系统参数不确定模型。此时，图 2.4.1 可以分解为图 2.4.2，其中Δ描述了系统的不确定性。

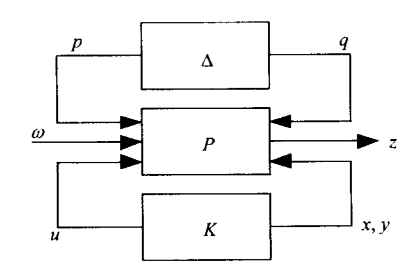


图 2.4.2　不确定控制系统的结构框图

进一步，如果系统由如下形式给出：

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) \tag{2.4.2}$$

其中，A 为标称模型参数，$\Delta A(t)$ 为系统参数的不确定项，一般都假设其为有界的，从描述实际系统的需要出发，或是为了数学处理的方便，以下几种不确定模型被广泛采用。

(1) 秩 1 分解模型

$$\Delta A(t)=\alpha_1(t)h_1^{\mathrm{T}}g_1+\alpha_2(t)h_2^{\mathrm{T}}g_2+\cdots+\alpha_m(t)h_m^{\mathrm{T}}g_m \tag{2.4.3}$$

其中，h_i，$g_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是确定的并具有适当维数的实向量，而 $\alpha_i(t)$ 是有界的实标量函数，是 Lebesgue 可测的且满足

$$|\alpha_i(t)|\leqslant\sigma_i,\quad \sigma_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{2.4.4}$$

其中，σ_i 为确定的标量。

(2) 线性不确定模型

$$\Delta A(t)=\alpha_1(t)A_1+\alpha_2(t)A_2+\cdots+\alpha_m(t)A_m \tag{2.4.5}$$

其中，$A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是确定的实矩阵，而 $\alpha_i(t)$ 是有界的实标量函数，其是 Lebesgue 可测的且满足

$$|\alpha_i(t)|\leqslant\sigma_i,\quad \sigma_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{2.4.6}$$

其中，σ_i 为确定的标量。另外一些研究中还假设不确定参数的变化率是有界的，满足

$$|\alpha_i(t)|\leqslant\theta_i,\quad \theta_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{2.4.7}$$

其中，θ_i 为确定的标量。

(3) 范数有界不确定模型

$$\|\Delta A(t)\|\leqslant\alpha \tag{2.4.8}$$

其中，α 为已知的标量。目前经常使用的是如下的更广泛的表示形式：

$$\Delta A(t)=DF(t)E \tag{2.4.9}$$

其中，D、E 是具有适当维数的实常数矩阵。$F(t)$ 为有界的实矩阵函数，其各元素是 Lebesgue 可测的，且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I \tag{2.4.10}$$

(4) 凸多面体不确定模型

$$\Delta A(t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)E_i \tag{2.4.11}$$

其中，E_i 是已知的实矩阵，$\alpha_i(t)$ 为有界的实标量函数，且满足

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)=1,\quad \alpha_i(t)\geqslant 0 \tag{2.4.12}$$

对由线性不确定模型描述的不确定参数

$$\begin{aligned}&\Delta A(t)=\alpha_1(t)\,A_1+\alpha_2(t)\,A_2+\cdots+\alpha_m(t)\,A_m\\&\left|\alpha_i(t)\right|\leqslant\sigma_i,\quad \sigma_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

可以转化成为如下的范数有界不确定模型：

$$D=\begin{bmatrix}\alpha_1A_1 & \alpha_2A_2 & \cdots & \alpha_mA_m\end{bmatrix} \tag{2.4.14}$$

$$F(t)=\mathrm{diag}\left\{\frac{\alpha_1(t)}{\sigma_1}I,\frac{\alpha_2(t)}{\sigma_2}I,\cdots,\frac{\alpha_m(t)}{\sigma_m}I\right\} \tag{2.4.15}$$

$$E=\begin{bmatrix}I & I & \cdots & I\end{bmatrix} \tag{2.4.16}$$

当然，这种转换也不是完全等价的，前者是后者的一个子集，这样会带来一定的保守性。

要特别指出的，对于范数有界不确定性，如果 $F_1(t),\ F_2(t)$ 都满足 $F_1(t)F_1(t)\leqslant I$，$F_2(t)F_2(t)\leqslant I$，显然对任意的 $F(t)=\alpha_1F_1(t)+\alpha_2F_2(t),\ \alpha_1\geqslant 0,\ \alpha_2\geqslant 0,\ \alpha_1+\alpha_2=1$ 有

$$\begin{aligned}&F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\left[\alpha_1F_1(t)+\alpha_2F_2(t)\right]^{\mathrm{T}}\left[\alpha_1F_1(t)+\alpha_2F_2(t)\right]\\&=\alpha_1^2F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t)+\alpha_2^2F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t)+\alpha_1\alpha_2(F_1^{\mathrm{T}}(t)F_2(t)+F_2^{\mathrm{T}}(t)F_1(t))\\&\leqslant\alpha_1^2F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t)+\alpha_2^2F_3^{\mathrm{T}}(t)F_2(t)+\alpha_1\alpha_2(F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t)+F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t))\\&=\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t)+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t)\\&=\alpha_1F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t)+\alpha_2F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t)\\&\leqslant(\alpha_1+\alpha_2)I\\&=I\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

因此，由 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$ 描述的不确定参数集合是一个凸集，而且由 $[-F^{\mathrm{T}}(t)][-F(t)]\leqslant I$，可知允许的不确定参数对于原点是对称的。对很多系统来说，其不确定参数并不一定刚好满足以上两个特征，如果把不确定参数嵌入到 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$ 这样一个集合中必然会带来保守性。

凸多面体不确定参数可以描述不确定参数空间的任意凸多面体，对于任意的范数有界不确定参数，可以用一定定点数目的凸多面体参数模型来进行任意逼近。

后面我们将看到，针对采用范数有界不确定参数模型的描述，要得到系统稳定性分析和鲁棒可镇定的充分必要条件往往比较复杂，但结果的计算量往往比较小，而采用凸多面体不确定参数模型描述的系统往往容易得到相关的充分必要条件，而结果的计算量会随着定点的数目指数增长，计算量往往会很大。

2.5　H_∞控制理论基础

H_∞ 范数定义如下：一个复变函数 $F(s)$，如果在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的开区间有界 $|F(s)|\leqslant b, \mathrm{Re}(s)>0$，则这个界限的上确界就是定义为 $F(s)$ 的 H_∞ 范数，用公式表示如下：

$$\|F(s)\|_\infty = \sup\{|F(s)|, \mathrm{Re}(s)>0\} \tag{2.5.1}$$

按最大模定理，用虚轴 $s=\mathrm{j}\omega$ 来替换右半开平面

$$\|F(s)\|_\infty = \sup\{|F(\mathrm{j}\omega)|, \omega\in R\} \tag{2.5.2}$$

这个 H_∞ 范数就标志着频率特性的最大模。

若假设 $G(s)$ 为稳定的从系统的干扰输入信号到被控输出信号的传递函数，如果能设计控制器使 $\|G(s)\|_\infty$ 达到最小值，那么具有有限功率谱的干扰对系统的控制输出的影响就可降低到最低限度，即如果输入的干扰信号是 2 范数有界，那么输出信号的 2 范数与输入信号的 2 范数之比将达到最小。

H_∞ 标准问题是：选择一个实、正则(即当 $s\to\infty$ 时仍有限)的控制器 $K(s)$，以确保在用控制器 K 内部稳定广义被控对象 G 的约束下，使由干扰输入 ω 到控制输出 z 的传递函数 $\Phi(s)$ 的 H_∞ 范数满足约束条件 $\|\Phi(s)\|_\infty\leqslant\gamma$。$H_\infty$ 标准问题的结构框图如图 2.5.1 所示。

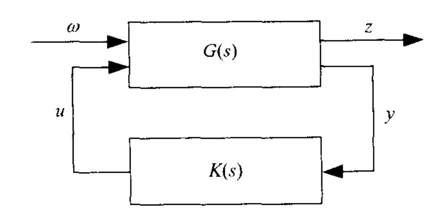


图 2.5.1　H_∞ 标准问题的结构框图

H_∞ 标准问题的系统结构描述如下：

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(s) \\ u(s) \end{bmatrix} := G(s)\begin{bmatrix} \omega(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \tag{2.5.3}$$

显然有

$$\Phi(s) = G_{11}(s) + G_{12}(s)K(s)\left[I - G_{22}(s)K(s)\right]^{-1} G_{21}(s) \tag{2.5.4}$$

其中，z、y、ω、u、分别是控制输出、测量输出、干扰输入以及控制输入。控制输出向量 z 通常包括误差信号和加权控制输出，干扰输入向量ω通常包括干扰、噪声和指令，测量输出向量 y 通常包括可测的并且可用于反馈的所有信号，控制输入向量 u 通常指可以改变系统行为的所有信号。

连续系统的 H_∞ 控制理论在最近几十年里得到了迅猛发展，各种有效的数学方法如空间理论、算子理论、插值理论等为 H_∞ 理论的发展提供了解决问题的工具，频域实现理论的成熟是以 Francis(1987)的文献为标志的，虽然他的处理思路：H_∞ 标准问题→模型匹配问题→Nehari 空间逼近问题颇有借鉴价值，而且频域处理概念清晰，但由于需要过多的问题转化过程，因而算法实现和数值计算相当困难。Doyle 等(1989,1988)的文献标志着状态空间实现理论的成熟。它通过采用 Hamiltonian 矩阵描述工具，将 H_∞ 标准问题最终归结为两个 Riccati 方程的解，该状态空间实现算法简洁明了，下面对此方法作一简单介绍。

先考虑传递函数 $G(s)$ 的 H_∞ 范数计算问题。给定传递函数

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.5}$$

其中，A 矩阵所有特征值均在左半平面。

原理上，$\|G(s)\|_\infty$ 可由其定义 $\|G(s)\|_\infty = \sup \bar{\sigma}\{G(\mathrm{j}\omega)\}$ 来计算。即给定一系列稠密的频率点 $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}$，则通过搜索可以得到 $\|G(s)\|_\infty$ 的估计值如下：

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \|G(\mathrm{j}\omega_k)\|_\infty \tag{2.5.6}$$

这种方法虽然概念清晰，但是需要冗长的漫无边际的搜索过程，并且仅仅得到 $\|G(s)\|_\infty$ 的近似值 $\|\hat{G}(s)\|_\infty$。

定义 Hamiltonian 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^* \end{bmatrix} \tag{2.5.7}$$

其中，$A \in R^{n\times n}$，$Q \in R^{n\times n}$，$R \in R^{n\times n}$，而且 $Q = Q^{\mathrm{T}}$，$R = R^{\mathrm{T}}$，假定 H 无虚轴上特征值。分别记 $X_-(H)$ 和 $X_+(H)$ 为 H 在域 $\mathrm{Re}(s) < 0$ 和域 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 那些特征值的不变子空间。寻找 $X_-(H)$ 的基向量，并且将他们合并为一个矩阵，对此矩阵按下述方式分块：

$$X_-(H)=\mathrm{Im}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix} \tag{2.5.8}$$

其中，X_1，$X_2 \in R^{n\times n}$。如果 X_1 非奇异，或者如果下述两个子空间互补：

$$X_-(H),\quad \mathrm{Im}\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix} \tag{2.5.9}$$

则 $X=X_2X_1^{-1}$ 唯一地由 H 确定，也就是说，$H\to X$ 是一个函数映射关系，因此可以用表达式 $X=\mathrm{Ric}(H)$ 来表示这种函数映射关系。用 $\mathrm{Dom}(H)$ 表示运算 Ric 的自变量域，它由具有下述两个性质的 Hamiltonian 矩阵 H 组成：H 无虚轴上特征根(稳定性质)和两个子空间互补(互补性质)。

现在来考虑 H_∞ 范数的计算问题，考虑给出的传递函数，而且假定 A 稳定和 $\gamma>0$，定义 Hamiltonian 矩阵形式如下：

$$H=\begin{bmatrix}A & \gamma^{-2}BB^*\\-C^*C & -A^*\end{bmatrix} \tag{2.5.10}$$

引理 2.5.1　下述四个条件是等价的：

(1) $\|G(s)\|_\infty\leqslant\gamma$；

(2) H 无虚轴上的特征值；

(3) $H\in\mathrm{dom(Ric)}$；

(4) $H\in\mathrm{dom(Ric)}$ 和 $X=\mathrm{Ric}(H)\geqslant 0$，如果 (C,A) 可观测，进一步有结论 $X=\mathrm{Ric}(H)>0$。

该引理提供了下述计算 H_∞ 范数的方法：选择一个正实数 γ，通过计算 γ，计算 H 的特征值来检查 $\|G(s)\|_\infty\leqslant\gamma$，并就此增大或减小 γ，重复着过程直至得到合适的 γ。

下面给出 DGKF 状态空间实现理论中输出反馈的主要结果，考虑图 2.5.1 中所示的 H_∞ 标准问题的结构框图。

假设增广对象 $G(s)$ 的传递函数矩阵具有下述状态空间实现结构：

$$G(s)=\left[\begin{array}{c|cc}A & B_1 & B_2\\\hline C_1 & 0 & D_{12}\\C_2 & D_{21} & 0\end{array}\right] \tag{2.5.11}$$

并作如下假设：

(1) (A,B_1) 可镇定，(C_1,A) 可检测；

(2) (A,B_2) 可镇定，(C_2,A) 可检测；

(3) $D_{12}^*[C_1 \quad D_{12}]=[0 \quad I]$；

(4) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$。

定义下述两个 Hamiltonian 矩阵：

$$H=\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^*-B_2B_2^* \\ -C_1^*C_1 & -A^* \end{bmatrix} \tag{2.5.12}$$

$$G=\begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2}C_1^*C_1-C_2^*C_2 \\ B_1B_1^* & -A \end{bmatrix} \tag{2.5.13}$$

主控制器由下面的引理给出：

引理 2.5.2　存在满足 $\|T_{z\omega}\|<\gamma$ 的控制器的充分必要条件是

(1) $H\in \mathrm{dom(Ric)}$ 和 $X=\mathrm{Ric}(H)\geqslant 0$；

(2) $J\in \mathrm{dom(Ric)}$ 和 $X=\mathrm{Ric}(J)\geqslant 0$；

(3) $\rho(XY)<\gamma^2$。

当这些条件满足时，主控制器的状态空间描述为

$$K(s)=\left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array}\right] \tag{2.5.14}$$

其中

$$\hat{A}_\infty = A+\gamma^{-2}B_1B_1^*X+B_2F_\infty+Z_\infty L_\infty C_2$$
$$F_\infty=-B_2^*X, \quad L_\infty=-YC_2^*$$
$$Z_\infty=(I-\gamma^{-2}YX)^{-1}$$

如果满足以上三个条件，那么满足 $\|T_{z\omega}\|<\gamma$ 的控制器束等价于从 y 到 u 的传递函数矩阵的集合(图 2.5.2)。

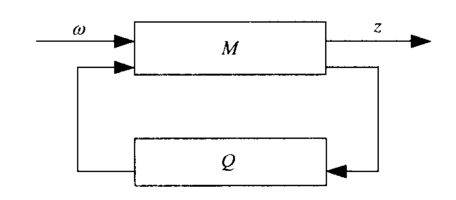


图 2.5.2　控制器束结构框图

其中

$$M(s)=\left[\begin{array}{c|cc}\hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0\end{array}\right]$$

$$Q\in RH_\infty,\quad \|Q\|_\infty<\gamma$$

2.6 注　记

本章的主要内容来源于相关的参考文献。

参 考 文 献

Ackermann J. 1980. Parameter space design of robust control systems. IEEE Trans. Auto. Contr., 25: 1058-1073.

Barmish B R, Corless M, Leitmann G. 1983. A new class of stabilizing controllers of an uncertain linear system. SIAM. J. Contr., 21: 246-252.

Barmish B R. 1983. Stabilization of uncertain system via linear control. IEEE Trans. Auto. Contr., 28: 848-850.

Barmish B R. 1985. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. J. Optim. Theory Appl., 46(4): 399-408.

Bellman R E, Cooke K L. 1963. Differential-Difference Equations. New York: Academic Press.

Boyd S, Ghaoui L T I, Feron E, Balakrishnan V. 1994. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, Philadelphia.

Choi H H, Chung M J. 1995. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls. Automatica, 31(9): 961-968.

De Souza C E, Xie L. 1992. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback H_∞ controllers. Syst. Contr. Letts., 18(1): 61-71.

Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, Francis B A. 1988. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. Proc. American Control conference.

Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, Francis BA. 1989. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. IEEE Trans. Auto. Contr., 34(8): 831-847.

Francis B A, Doyle J C. 1987. Linear control theory with an H_∞ optimization criterion. SIAM J. Control and Optimization, 25: 815-844

Francis B A. 1987. A course in H_∞ control theory. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer-Verlag.

Kharatishivili G L. 1961. The maximum principle in the theory of optimal process with time delay. Dokl, Alad, Nauk, SSSR, 136(1).

Kim J H, Jeung E T, Park H B. 1996. Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input. Automatica, 32(9): 1337-1339.

Kim J H, Park H B. 1999. H_∞ state-feedback control for generalized continuous/discrete time-delay systems. Automatica, 35(2): 1443-1451.

Kimua H. 1984. Robust stabilizability for a class of transfer functions. IEEE Trans. Auto. Contr., 29(9): 788-793.

Li X, de Souza C E. 1997. Criteria for robust stability of uncertain linear systems with time-varying state delays. Automatica. 33(12): 1657-1662.

Mahmoud M S. 2000. Robust H_∞ control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays. Automatica, 36(5): 627-635.

Ni M L, Wu H X. 1993. A Riccati equation approach to the design of linear robust controllers. Automatica, 29(6): 1603-1605.

Petersen I R. 1995. A connection between H_∞ control and the absolute stabilizability of discrete-time uncertain linear systems. Automatica, 31(8): 1193-1195.

Ray W H. 1981. Advanced Process Control. New York: Mcgraw-Hill.

Safonov M G, Le V X. 1988. An alternative solution to the H_∞ optimizlity control problems. Syst. Contr. Letts., 10: 155-158.

Scherer C, Gahinet P, Chilali M. 1997. Multi-objective output-feedback control via LMI optimization. IEEE Trans. Auto. Contr., 42(7): 898-911.

Schmitendorf W E. 1988. Designing stabilizing controllers for uncertain systems using Riccti equation approach. IEEE Trans. Auto. Contr., 33(2): 376-379.

Shi G, Zou Y, Yang C. 1992. An algebratic approach to robust H_∞ control via state feedback. Syst. Contr.. Letts., 18(2): 365-370.

Simth O J M. 1959. A controller to overcome dead time. ISA J., 67(2).

Vidyasagar M. 1985. Control System Synthesis: a Factorization Approach. Cambridge. MA: MIT Press.

Vidyasagar M. 1987. Some results on simultaneous stabilization with multiple domains of stability. Automatica, 23(4): 535-540.

Xie L, de Souza C E. 1990. Robust H_∞ control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix. Syst Contr. Lett., 14(2): 398-483.

Xu B G, Liu Y Q. 1994. An improved Razumikhin-type theorem and its applications. IEEE Trans. Auto. Contr., 39(6): 839-841.

Zames G, Francis B A. 1983. Feedback, mini-max sensitivity and optimal robustness. IEEE Trans. Auto. Contr., 28(5): 585-601.

Zames G. 1981. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. IEEE Trans. Auto. Contr., 26(2): 301-320.

Zhou K, Khargonekar P P. 1988. Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. Syst. Contr. Letts., 10: 17-20.

第 3 章　基于 Riccati 方程的不确定线性时滞系统的鲁棒控制

3.1 引　　言

近年来，具有时变未知但有界不确定参数的不确定系统的鲁棒控制问题引起了广泛的研究兴趣。在研究鲁棒镇定问题的方法中，二次镇定理论在处理时变参数不确定性时显示出强大的生命力。该理论最早在 Barmish(1985)文献中提出，用来研究满足匹配条件的不确定系统的控制问题。从这以后，涌现出大量的研究成果，得到了基于二次镇定概念处理不确定系统鲁棒镇定问题的 Riccati 方程方法，并且不需要满足匹配条件。最近几年，Riccati 方程方法已经被扩展来处理具有状态时滞和含有秩 1 不确定性的线性动态系统的鲁棒控制问题，最终可以得到无记忆线性状态反馈控制器；而 Su(1998a, 1998b, 1998c)分别将该方法扩展至具有状态时滞和控制时滞的不确定系统的鲁棒镇定问题。Choi 则研究了同时具有时变状态时滞和时变控制时滞的不确定系统的鲁棒镇定问题。

以上这些研究结果均要求不确定系统的全部状态可以量测得到，而实际系统常常不满足此条件，因此利用输出反馈进行鲁棒镇定的研究更具有实用研究价值。目前已有一些有关采用输出反馈进行鲁棒镇定的研究报道。基于二次镇定概念的输出反馈鲁棒镇定问题也存在一些研究报道。到目前为止，不确定时滞系统的输出反馈鲁棒镇定问题仅有少许研究报道 Su 等(1997,1999)。Tseng 给出采用静态输出反馈控制律处理具有耦合参数不确定性的不确定时滞系统的鲁棒镇定问题。朱晓东等(1996)将 Jabbari 等(1991)文献的结果推广至采用动态输出反馈控制律处理一类不确定时滞系统的鲁棒镇定问题，该系统的不确定性是秩 1 型的，并且要求满足匹配条件。

本章将针对具有状态时滞和控制时滞的线性不确定时滞系统，并假设系统不确定性具有时变范数有界特性且不需满足匹配条件，推导得到了无记忆鲁棒镇定控制器存在的充分条件，进一步通过等价系统变换方法构造出无记忆鲁棒镇定控制器的常数反馈增益矩阵；另一方面基于 Riccati 方程方法推导得到了鲁棒输出反馈控制器存在的充分条件，并且可通过求解两个线性矩阵不等式构造出动态输出反馈控制器观测增益阵和反馈增益阵。该方法具有不必调节和选择参数的优点，并且容易进行数值计算。

3.2 不确定线性连续系统的状态反馈鲁棒镇定

为获得不确定线性时滞系统的鲁棒控制结论，我们首先针对基本的不确定线性无时滞系统，得到基于二次镇定概念处理此系统鲁棒镇定问题的 Riccati 方程方法，进而将所得结论推广到不确定线性时滞系统中去。

考虑参数不确定系统

$$\dot{x}(t)=\left[A+\Delta A(t)\right]x(t)+\left[B+\Delta B(t)\right]u(t) \tag{3.2.1}$$

其中，$x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$ 分别是系统的状态和控制向量，A 和 B 是给定的具有适当维数的实数矩阵。$\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 是连续的实矩阵值函数，代表参数矩阵的不确定性，为本章叙述方便计，可将其划分成如下的几种形式：

(1) 范数有界不确定性，此时 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 可表示成

$$[\Delta A(t)\quad \Delta B(t)]=DF(t)[E_1\quad E_2] \tag{3.2.2}$$

其中，D、E_1 和 E_2 是具有适当维数的已知常数矩阵，$F(t)$ 是具有 Lebesgue 可测元的不确定矩阵，且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$（$I$ 表示适当维数的单位矩阵)。

(2) 匹配不确定性，此时 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 可表示成

$$\Delta A(t)=BD(t),\quad \Delta B(t)=BE(t) \tag{3.2.3}$$

其中，$D(t)$ 和 $E(t)$ 为连续矩阵函数，满足匹配条件 $2I+E(t)+E^{\mathrm{T}}(t)>0$。

(3) 秩 1 型不确定性，此时 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 可表示成

$$\Delta A(t)=B\Big(\sum_{i=1}^{k}A_iR_i(t)\Big),\quad \Delta B(t)=B\Big(\sum_{i=1}^{l}B_iS_i(t)\Big) \tag{3.2.4}$$

其中，$A_i=d_ie_i^{\mathrm{T}}$，$B_i=f_ig_i^{\mathrm{T}}$，d_i、e_i、f_i 和 g_i 均为已知的 n 维实向量；而 $R_i(t)$ 和 $S_i(t)$ 分别是 Lebesgue 可测的有界实标量函数且分别在紧集 $\varPsi$ 和 $\varPhi$ 中变化，其中

$$\begin{aligned}\varPsi&=\{R_i(t):\left|R_i(t)\right|\leqslant \bar{R},\ i=1,2,\cdots,k\}\\ \varPhi&=\{S_i(t):\left|S_i(t)\right|\leqslant \bar{S},\ i=1,2,\cdots,l\}\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

(4) 凸多面体不确定性，此时 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 可表示成式(3.2.4)的形式，$R_i(t)$ 和 $S_i(t)$ 分别是有界实标量函数，且满足

$$\sum_{i=1}^{k} R_i(t)=1, \quad R_i(t)\geqslant 0$$
$$\sum_{i=1}^{k} S_i(t)=1, \quad S_i(t)\geqslant 0 \tag{3.2.6}$$

在本节中，我们主要考虑不确定系统(3.2.1)的鲁棒二次镇定问题。为此，首先对以下的不确定自治系统引进鲁棒二次稳定的概念。

$$\dot{x}(t)=\left[A+\Delta A(t)\right]x(t) \tag{3.2.7}$$

定义 3.2.1　对系统(3.2.7)，若存在一个n阶正定对称矩阵P和一个常数$\alpha>0$，使得对任意允许的不确定性和所有$(x,t)\in R^n\times R$

$$\dot{V}(x,t)=2x^{\mathrm{T}}P[A+\Delta A(t)]x\leqslant -\alpha\|x\|^2 \tag{3.2.8}$$

成立，则系统(3.2.7)称为是鲁棒二次稳定的。

定义 3.2.2　若对不确定系统(3.2.1)，存在一个反馈控制律(动态或静态反馈，线性或非线性反馈)，使得所得出的闭环系统是鲁棒二次稳定的，则系统(3.2.1)称为是二次能镇定的，相应的控制律称为是系统(3.2.1)的一个二次稳定化控制律。特别地，若系统(3.2.1)是二次能镇定的，且二次稳定化控制律可以选为一个线性状态反馈控制律$u(t)=Kx(t),\ K\in R^{m\times n}$，则系统(3.2.1)称为是可以用线性状态反馈二次镇定的。

引理 3.2.1　对任意满足$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$的矩阵$F(t)\in R^{p\times q}$

$$2x^{\mathrm{T}}DF(t)Ey\leqslant \varepsilon x^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}x+\varepsilon^{-1}y^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Ey$$

对任意向量$x\in R^p, y\in R^q$和常数$\varepsilon>0$成立，其中D、E是适当维数的常数矩阵。

引理 3.2.2　给定任意向量$x\in R^p, x\in R^q$，下式成立：

$$\max\{(x^{\mathrm{T}}Fy)^2: F\in R^{p\times q}, F^{\mathrm{T}}F\leqslant I\}=(x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}y)$$

引理 3.2.3　设X、Y和Z是给定的$k\times k$阶实对称矩阵，满足$X\geqslant 0$，且对$x^{\mathrm{T}}Zx\geqslant 0$的所有非零向量$x\in R^k$，有

(1) $x^{\mathrm{T}}Yx<0$；

(2) $\delta(x)=(x^{\mathrm{T}}Yx)^2-4(x^{\mathrm{T}}Xx)(x^{\mathrm{T}}Zx)>0$；

则存在常数$\lambda>0$，使得下式成立：

$$M(\lambda)=\lambda^2X+\lambda Y+Z<0$$

引理 3.2.4　设 $X \in R^{k \times k}$ 为实对称矩阵，$B \in R^{k \times m}$ 是一个使得对所有满足 $B^{\mathrm{T}}\eta = 0$ 的非零向量 $\eta \in R^k, \eta^{\mathrm{T}} X \eta < 0$ 成立的常数矩阵，则存在一个常数 $\varepsilon > 0$，使得矩阵 $X - \varepsilon BB^{\mathrm{T}} < 0$。

引理 3.2.5　设 $R_1 = R_1^{\mathrm{T}}, Q_1 > 0, P$ 是 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + PR_1P + Q_1 = 0$$

的正定对称解，则对满足 $R_2 \leqslant R_1, 0 < Q_2 \leqslant Q_1$ 的任意对称矩阵 R_2 和 Q_2，Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}S + SA + SR_2S + Q_2 = 0$$

有一个使得 $\sigma(A + R_2S) \subset C^-$ 的对称解 S，且 $S > 0$。

引理 3.2.6　设 $r = \mathrm{rank}(E_2), U \in R^{j \times r}, \varSigma \in R^{r \times m}$ 是使得 $E_2 = U\varSigma$，且 $\mathrm{rank}(U) = \mathrm{rank}(\varSigma) = r$ 的任意矩阵，选取矩阵 $\varPhi \in R^{(m-r) \times m}$，使得 $\varPhi\varSigma^{\mathrm{T}} = 0, \varPhi\varPhi^{\mathrm{T}} = I$（如果 $r = m$，则取 $\varPhi=0$）。定义 $\varXi = \varSigma^{\mathrm{T}}(\varSigma\varSigma^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}(\varSigma\varSigma^{\mathrm{T}})^{-1}\varSigma$，则不难验证以下等式成立：

$$E_2\varPhi^{\mathrm{T}} = 0$$
$$\varXi E_2^{\mathrm{T}} E_2 \varXi = \varXi$$

首先，针对不确定系统(3.2.1)，假定不确定性为范数有界不确定性，被描述成式(3.2.2)的形式，下面的定理 3.2.1 给出了线性状态反馈二次镇定的结果。

定理 3.2.1　对不确定系统(3.2.1)，若存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得代数 Riccati 方程

$$\begin{aligned}(A - B\varXi E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P + P(A - B\varXi E_2^{\mathrm{T}}E_1) + P(DD^{\mathrm{T}} - B\varXi B^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\varepsilon}B\varPhi^{\mathrm{T}}\varPhi B^{\mathrm{T}})P \\ + E_1^{\mathrm{T}}(I - E_2\varXi E_2^{\mathrm{T}})E_1 + \varepsilon I = 0 \qquad (3.2.9)\end{aligned}$$

有一个正定对称解 P，则不确定系统(3.2.1)可以用一个线性状态反馈控制律二次镇定，且

$$u(t) = -[(\frac{1}{2\varepsilon}\varPhi^{\mathrm{T}}\varPhi + \varXi)B^{\mathrm{T}}P + \varXi E_2^{\mathrm{T}}E_1]x(t) \qquad (3.2.10)$$

是系统(3.2.1)的一个二次稳定化状态反馈控制律。

反之，若不确定系统(3.2.1)可以用线性状态反馈二次镇定，则必定存在一个

常数 $\varepsilon^* > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*)$，Riccati 方程(3.2.9)有一个稳定解 $P_0 > 0$。

证明　若存在某个 $\varepsilon > 0$，使得 Riccati 方程(3.2.9)有一个正定对称解，我们证明(3.2.10)是系统(3.2.1)的一个二次稳定化状态反馈控制律。事实上，由系统(3.2.1)和控制律(3.2.10)构成的闭环系统是

$$\dot{x}(t) = \{A + DF(t)E_1 - (B + DF(t)E_2)[(\frac{1}{2\varepsilon}\Phi^{\mathrm{T}}\Phi + \Xi)B^{\mathrm{T}}P + \Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1]\}x(t) \quad (3.2.11)$$

考虑 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$，则沿系统(3.2.11)的轨线，$V(x)$关于时间的导数是

$$\begin{aligned} L(x,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) = x^{\mathrm{T}}[(A + DF(t)E_1)^{\mathrm{T}}P + P(A + DF(t)E_1)]x \\ &\quad - 2x^{\mathrm{T}}P(B + DF(t)E_2)[(\frac{1}{2\varepsilon}\Phi^{\mathrm{T}}\Phi + \Xi)B^{\mathrm{T}}P + \Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1]x \\ &= x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA - \frac{1}{\varepsilon}PB\Phi^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}}P - 2PB\Xi B^{\mathrm{T}}P - E_1^{\mathrm{T}}E_2\Xi B^{\mathrm{T}}P \\ &\quad - PB\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)x + 2x^{\mathrm{T}}PDF(t)[E_1 - E_2\Xi(B^{\mathrm{T}}P + E_2^{\mathrm{T}}E_1)]x \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

在上式第二个等式的导出中，应用了引理 3.2.6。又根据引理 3.2.1 和引理 3.2.6，可得

$$\begin{aligned} & 2x^{\mathrm{T}}PDF(t)[E_1 - E_2\Xi(B^{\mathrm{T}}P + E_2^{\mathrm{T}}E_1)]x \\ & \leqslant x^{\mathrm{T}}PDD^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}[E_1 - E_2\Xi(B^{\mathrm{T}}P + E_2^{\mathrm{T}}E_1)]^{\mathrm{T}}[E_1 - E_2\Xi(B^{\mathrm{T}}P + E_2^{\mathrm{T}}E_1)]x \\ & = x^{\mathrm{T}}(PDD^{\mathrm{T}}P + E_1^{\mathrm{T}}E_1 + PB\Xi B^{\mathrm{T}}P - E_1^{\mathrm{T}}E_2\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)x \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

将式(3.2.13)代入到式(3.2.12)中，得到

$$\begin{aligned} L(x,t) &\leqslant x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA - \frac{1}{\varepsilon}PB\Phi^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}}P - PB\Xi B^{\mathrm{T}}P - E_1^{\mathrm{T}}E_2\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1 \\ &\quad - PB\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1 - E_1^{\mathrm{T}}E_2\Xi B^{\mathrm{T}}P + PDD^{\mathrm{T}}P + E_1^{\mathrm{T}}E_1)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A - B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P + P(A - B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1) + P(DD^{\mathrm{T}} - B\Xi B^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\varepsilon}B\Phi^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}})P \\ & + E_1^{\mathrm{T}}(I - E_2\Xi E_2^{\mathrm{T}})E_1 + \varepsilon I = 0 \end{aligned}$$

根据 Riccati 方程(3.2.9)，进一步得到 $L(x,t) \leqslant -\varepsilon x^{\mathrm{T}}x$。

取式(3.2.8)中的 $\alpha = \varepsilon > 0$，则根据定义 3.1.1 知，系统(3.2.11)是二次稳定的，故控制律(3.2.10)是系统(3.2.1)的一个二次稳定化状态反馈控制律。

反之，若系统(3.2.1)可以用线性状态反馈二次镇定，则从定义知，存在一个正定对称矩阵 $S \in R^{n\times n}$ 和一个常数矩阵 $K \in R^{m\times n}$，使得对所有满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$ 的不确定矩阵 $F(t)$

$$x\{[A-BK+DF(t)(E_1-E_2K)]^{\mathrm{T}}S+S[A-BK+DF(t)(E_1-E_2K)]\}x<0 \quad (3.2.14)$$

对所有 $(x,t)\in R^n \times R,\ x\neq 0$ 成立，定义

$$\Pi=(A-BK)^{\mathrm{T}}S+S(A-BK) \quad (3.2.15)$$

则对所有允许的不确定性 $F(t)$ 和 $(x,t)\in R^n\times R,\ x\neq 0$

$$x^{\mathrm{T}}\Pi x<-2x^{\mathrm{T}}SDF(t)(E_1-E_2K)x$$

进而有 $x^{\mathrm{T}}\Pi x<-2\max\{x^{\mathrm{T}}SDF(t)(E_1-E_2K)x:\ F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I\}\leqslant 0$, 因此

$$(x^{\mathrm{T}}\Pi x)^2>4\max\{[x^{\mathrm{T}}SDF(t)(E_1-E_2K)x]^2:F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I\}$$

根据引理 3.2.2，得

$$(x^{\mathrm{T}}\Pi x)^2>4(x^{\mathrm{T}}SDD^{\mathrm{T}}Sx)(x^{\mathrm{T}}(E_1-E_2K)^{\mathrm{T}}(E_1-E_2K)x)$$

容易验证，$X=SDD^{\mathrm{T}}S,Y=\Pi,Z=(E_1-E_2K)^{\mathrm{T}}(E_1-E_2K)$ 满足引理 3.2.3 的条件，则根据引理 3.2.3，存在一个常数 $\lambda>0$，使得

$$\lambda^2 SDD^{\mathrm{T}}S+\lambda\Pi+(E_1-E_2K)^{\mathrm{T}}(E_1-E_2K)<0$$

定义 $P=\lambda S$，则以上不等式可以进一步写成

$$\begin{aligned}&(A-BK)^{\mathrm{T}}P+P(A-BK)+PDD^{\mathrm{T}}P+(E_1-E_2K)^{\mathrm{T}}(E_1-E_2K)=A^{\mathrm{T}}P+PA\\&+PDD^{\mathrm{T}}P+E_1^{\mathrm{T}}E_1+K^{\mathrm{T}}(E_2^{\mathrm{T}}E_2)K-K^{\mathrm{T}}(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)-(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}K<0\end{aligned} \quad (3.2.16)$$

以下的目的是配一个关于 K 的平方项，从而可以得到一个不含 K 的矩阵不等式。另一方面，由于 E_2 未必满秩，即 $E_2^{\mathrm{T}}E_2$ 未必可逆，故须将 E_2 作适当的分解，即利用引理 3.2.6 中的分解式。

定义 $T=\begin{bmatrix}\Sigma^{\mathrm{T}} & \Phi^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\in R^{m\times m}$ (如果 $E_2=0$，则 $T=\Phi$)，则 T 是非奇异的，故 T^{-1} 存在，且

$$E_2T=U\Sigma\begin{bmatrix}\Sigma^{\mathrm{T}} & \Phi^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2\Sigma^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$$

定义 $L=\begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix}=T^{-1}K$，则

$$\begin{aligned}&K^{\mathrm{T}}(E_2^{\mathrm{T}}E_2)K-K^{\mathrm{T}}(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)-(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}K\\&=L^{\mathrm{T}}(E_2T)^{\mathrm{T}}(E_2T)L-L^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)-(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}TL\\&=L_1^{\mathrm{T}}\Sigma E_2^{\mathrm{T}}E_2\Sigma^{\mathrm{T}}L_1-L_1^{\mathrm{T}}\Sigma(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)-(E_1^{\mathrm{T}}E_2+PB)\Sigma^{\mathrm{T}}L_1-L_2^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}}P-PB\Phi^{\mathrm{T}}L_2\\&=W^{\mathrm{T}}W-(E_1^{\mathrm{T}}E_2+PB)\Xi(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)-L_2^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}}P-PB\Phi^{\mathrm{T}}L_2\end{aligned}$$

其中，$W=-U\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}L_1+U(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}(\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\Sigma(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)$，因此由引理 3.2.6 得到

$$\begin{aligned}&A^{\mathrm{T}}P+PA+PDD^{\mathrm{T}}P+E_1^{\mathrm{T}}E_1+W^{\mathrm{T}}W-(E_1^{\mathrm{T}}E_2+PB)\Xi(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)\\&-L_2^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}}P-PB\Phi^{\mathrm{T}}L_2<0\end{aligned}$$

对任意满足 $\Phi B^{\mathrm{T}}Px=0$ 的向量 $x\neq 0$，从上式得到

$$x^{\mathrm{T}}[A^{\mathrm{T}}P+PA+PDD^{\mathrm{T}}P+E_1^{\mathrm{T}}E_1-(E_1^{\mathrm{T}}E_2+PB)\Xi(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)]x<0 \tag{3.2.17}$$

记 $X=A^{\mathrm{T}}P+PA+PDD^{\mathrm{T}}P+E_1^{\mathrm{T}}E_1-(E_1^{\mathrm{T}}E_2+PB)\Xi(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P),G=\Phi B^{\mathrm{T}}P$，则根据引理 3.2.4 知，存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+PDD^{\mathrm{T}}P+E_1^{\mathrm{T}}E_1-(E_1^{\mathrm{T}}E_2+PB)\Xi(E_2^{\mathrm{T}}E_1+B^{\mathrm{T}}P)-\frac{1}{\varepsilon}PB\Phi^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}}P<0$$

以上不等式可以进一步写成

$$\begin{aligned}&(A-B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P+P(A-B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)+P(DD^{\mathrm{T}}-B\Xi B^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\varepsilon}B\Phi^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}})P\\&+E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2\Xi E_2^{\mathrm{T}})E_1<0\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

通过以下式子定义一个矩阵 Q，

$$\begin{aligned}-\varepsilon Q=&(A-B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P+P(A-B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)\\&+P(DD^{\mathrm{T}}-B\Xi B^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\varepsilon}B\Phi^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}})P+E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2\Xi E_2^{\mathrm{T}})E_1\end{aligned}$$

从式(3.2.18)易得 $Q>0$，且

$$\begin{aligned}&(A-B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P+P(A-B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1)\\&+P(DD^{\mathrm{T}}-B\Xi B^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\varepsilon}B\Phi^{\mathrm{T}}\Phi B^{\mathrm{T}})P+E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2\Xi E_2^{\mathrm{T}})E_1+\varepsilon Q=0\end{aligned}$$

对以上确定的矩阵 $Q>0$ 和常数 $\varepsilon>0$，存在一个常数 $\varepsilon^*>0$，$\varepsilon>\varepsilon^*>0$，使得对所有的常数 $\tilde{\varepsilon}\in(0,\varepsilon^*]$，有 $\tilde{\varepsilon}I<\varepsilon Q$。

另一方面，$I-E_2\varXi E_2^{\mathrm{T}}=I-U(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，因此对所有的常数 $\tilde{\varepsilon}\in(0,\varepsilon^*]$，有

$$DD^{\mathrm{T}}-B\varXi B^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}B\varPhi^{\mathrm{T}}\varPhi B^{\mathrm{T}}<DD^{\mathrm{T}}-B\varXi B^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\varepsilon}B\varPhi^{\mathrm{T}}\varPhi B^{\mathrm{T}}$$

$$0<E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2\varXi E_2^{\mathrm{T}})E_1+\tilde{\varepsilon}I<E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2\varXi E_2^{\mathrm{T}})E_1+\varepsilon Q$$

从而根据引理 3.2.5，对所有的常数 $\tilde{\varepsilon}\in(0,\varepsilon^*]$，下列 Riccati 方程

$$(A-B\varXi E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P+P(A-B\varXi E_2^{\mathrm{T}}E_1)+P(DD^{\mathrm{T}}-B\varXi B^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}B\varPhi^{\mathrm{T}}\varPhi B^{\mathrm{T}})P$$
$$+E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2\varXi E_2^{\mathrm{T}})E_1+\tilde{\varepsilon}I=0$$

有唯一的对称解 P_0，使得矩阵

$$A-B\Xi E_2^{\mathrm{T}}E_1+(DD^{\mathrm{T}}-B\Xi B^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}B\varPhi^{\mathrm{T}}\varPhi B^{\mathrm{T}})P_0$$

是渐近稳定的，且 $P_0>0$。证毕。

根据以上定理，可以得到以下的一个不确定系统鲁棒二次稳定化状态反馈控制律的设计算法：

算法 3.2.1 具体步骤如下：

第 1 步，确定一个 ε 的初始值，例如，$\varepsilon=1$。

第 2 步，求解 Riccati 方程(3.2.9)，并确定该方程是否有一个正定对称解矩阵，若这样的一个解存在，则本算法成功。进而根据式(3.2.10)，得到不确定系统的一个稳定化控制律。否则进行第 3 步。

第 3 步，取 $\varepsilon=\varepsilon/2$。若 ε 小于某个事先给定的计算精度 ε_0，则停止计算，系统不能鲁棒二次镇定。否则转到第 2 步，重复以上的计算。

有许多标准的算法可用来求解 Riccati 方程(3.2.9)。例如，利用 Hamilton 矩阵的特征向量方法等。

推论 3.2.1 在定理 3.2.1 中，如果 $\varTheta:=E_2'E_2$ 非奇异，则 Riccati 方程(3.2.9)变成为

$$(A-B\varTheta^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P+P(A-B\varTheta^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_1)+P(DD^{\mathrm{T}}-B\varTheta^{-1}B^{\mathrm{T}})P$$
$$+E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2\varTheta^{-1}E_2^{\mathrm{T}})E_1+\varepsilon I=0 \tag{3.2.19}$$

相应的控制律是 $u(t)=-\varTheta^{-1}(B^{\mathrm{T}}P+E_2^{\mathrm{T}}E_1)x(t)$。

推论 3.2.2 存在一个常数矩阵 $K \in R^{m\times n}$ 和一个对称正定矩阵 P, 使得矩阵不等式

$$(A-BK)^{\mathrm T}P+P(A-BK)+PDD^{\mathrm T}P+(E_1-E_2K)^{\mathrm T}(E_1-E_2K)<0 \quad (3.2.20)$$

成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$ ，使得 Riccati 方程(3.2.9)有一个对称正定解 P, 如果这样一个解存在，则解矩阵 P 和矩阵

$$K=\left(\frac{1}{2\varepsilon}\Phi^{\mathrm T}\Phi+\Xi\right)B^{\mathrm T}P+\Xi E_2^{\mathrm T}E_1 \quad (3.2.21)$$

满足矩阵不等式(3.2.20)。

证明 若存在一个常数 $\varepsilon>0$ ，使得 Riccati 方程(3.2.9)有一个对称正定解 P ，则将这个解矩阵 P 和由式(3.2.21)确定的矩阵 K 代入到不等式(3.2.20)的左边，得到

$$\begin{aligned}
&(A-BK)^{\mathrm T}P+P(A-BK)+PDD^{\mathrm T}P+(E_1-E_2K)^{\mathrm T}(E_1-E_2K)\\
&=(A-B\Xi E_2^{\mathrm T}E_1)^{\mathrm T}P+P(A-B\Xi E_2^{\mathrm T}E_1)-PB(\frac{1}{\varepsilon}\Phi^{\mathrm T}\Phi+2\Xi)B^{\mathrm T}P+PDD^{\mathrm T}P\\
&\quad +E_1^{\mathrm T}E_1-E_1^{\mathrm T}E_2\Xi(B^{\mathrm T}P+E_2^{\mathrm T}E_1)-(B^{\mathrm T}P+E_2^{\mathrm T}E_1)^{\mathrm T}\Xi E_2^{\mathrm T}E_1\\
&\quad +(B^{\mathrm T}P+E_2^{\mathrm T}E_1)^{\mathrm T}\Xi(B^{\mathrm T}P+E_2^{\mathrm T}E_1)\\
&=(A-B\Xi E_2^{\mathrm T}E_1)^{\mathrm T}P+P(A-B\Xi E_2^{\mathrm T}E_1)-PB(\frac{1}{\varepsilon}\Phi^{\mathrm T}\Phi+\Xi)B^{\mathrm T}P\\
&\quad +PDD^{\mathrm T}P+E_1^{\mathrm T}(I-E_2\Xi E_2^{\mathrm T})E_1\\
&=-\varepsilon I<0
\end{aligned}$$

反之，若存在矩阵 K 和 $P>0$ 满足矩阵不等式(3.2.20)，则由定理 3.2.1 证明过程中式(3.2.16)的推导过程，可得本推论的结果。

3.3 匹配不确定线性时滞系统的鲁棒控制

考虑参数不确定线性时滞系统

$$\dot x(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[A_1+\Delta A_1(t)]x(t-d(t))+[B+\Delta B(t)]u(t) \quad (3.3.1)$$

其中，$x(t)\in R^n$ ，$u(t)\in R^m$ 分别是系统的状态和控制向量，A、A_1 是给定的具有适当维数的实数矩阵，$\Delta A(t)$ 、$\Delta A_1(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 是连续的实矩阵值函数，代表参数矩阵的匹配不确定性，此时 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 可表示成

$$\Delta A(t)=BD(t),\quad \Delta B(t)=BE(t) \quad (3.3.2)$$

其中，$D(t)$ 和 $E(t)$ 为连续矩阵函数，满足匹配条件 $2I+D(t)+D^{\mathrm{T}}(t)>0$, $2I+E(t)+E^{\mathrm{T}}(t)>0$。

本节研究一类特殊不确定系统的鲁棒二次镇定问题。考虑不确定系统(3.3.1)，如果存在连续矩阵函数 $D(t)$ 和 $E(t)$，使得对所有 $t\in\Omega$,下式成立：

$$2I+D(t)+D^{\mathrm{T}}(t)>0,\quad 2I+E(t)+E^{\mathrm{T}}(t)>0 \tag{3.3.3}$$

本节针对满足条件(3.3.2)、(3.3.3)的匹配不确定系统，介绍一种鲁棒二次稳定化控制器的简便设计方法。根据连续函数的性质，从式(3.3.3)和 Ω 的紧性，可知存在一个常数 $\delta>0$，使得对所得的 $t\in\Omega$，

$$2I+D(t)+D^{\mathrm{T}}(t)>\delta I,\quad 2I+E(t)+E^{\mathrm{T}}(t)>\delta I \tag{3.3.4}$$

定理 3.3.1　对满足匹配条件(3.3.2)、(3.3.3)的不确定系统(3.3.1)，若 (A,B) 能控，则该系统可以用一个线性状态反馈鲁棒二次镇定，且

$$\begin{aligned} u(t) &= -Kx(t) \\ K &= \gamma B^{\mathrm{T}}P \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

是系统的一个鲁棒二次稳定化状态反馈控制律。其中，γ 是一个满足 $\gamma\delta>1$ 的任意常数，P 是 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P+PA-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q=0 \tag{3.3.6}$$

的对称正定解矩阵，Riccati 方程中的加权矩阵被选成是

$$R=\frac{1}{\gamma\delta-1}I,\quad Q > DT(q)D(q)+\varepsilon I,\quad \forall q\in\Omega \tag{3.3.7}$$

ε 是任意正常数。

证明　匹配不确定系统(3.3.1)在应用控制律(3.3.5)后得到的闭环系统是

$$\dot{x}(t)=[A+BD(q)-\gamma BB^{\mathrm{T}}P-\gamma BE(q)B^{\mathrm{T}}P]x(t) \tag{3.3.8}$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px \tag{3.3.9}$$

其中，矩阵 P 是 Riccati 方程(3.3.6)的解，则 $V(x)$ 是正定的，沿闭环系统(3.3.8)的轨线，$V(x)$ 关于时间的导数是

$$L(x,t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) = x^{\mathrm{T}}[A^{\mathrm{T}}P + PA]x + 2x^{\mathrm{T}}PBD(q)x$$
$$-\gamma x^{\mathrm{T}}PB[2I + E(q) + E^{\mathrm{T}}(q)]B^{\mathrm{T}}Px \tag{3.3.10}$$

根据引理 3.2.1，可知 $2x^{\mathrm{T}}PBD(q)x \leqslant x^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}(q)D(q)x$，将此不等式代入到上式，且利用式(3.3.4)，得到

$$L(x,t) \leqslant x^{\mathrm{T}}[A^{\mathrm{T}}P + PA - PB(\gamma\delta - 1)B^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}(q)D(q)]x$$

根据 Riccati 方程(3.3.6)和其中的加权矩阵的选取，可进一步得到

$$L(x,t) \leqslant -\varepsilon x^{\mathrm{T}}x < 0$$

对所有的 $t \in \Omega$ 成立。因此，对任意不确定参数 $t \in \Omega$，闭环系统(3.3.8)是稳定的，即控制律(3.3.5)是匹配系统(3.3.1)的一个鲁棒稳定化控制律。定理得证。

定理 3.3.1 不仅证明了匹配系统总可以用一个线性状态反馈控制律二次镇定，而且，给出了二次鲁棒稳定化状态反馈控制律的设计方法。显然，这个方法不需要任何的参数搜索，因此计算更加简单。

3.4　$HF(t)E$ 型不确定线性时滞系统的鲁棒控制

考虑如下的不确定线性时滞系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A_0 + \Delta A_0(t)]x(t) + [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t - d(t))\\ &\quad + [B_0 + \Delta B_0(t)]u(t) + [B_1 + \Delta B_1(t)]u(t - h(t))\\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\max(d^*, h^*), 0]\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

其中，$x(t) \in R^n$ 是系统的状态向量，$u(t) \in R^m$ 是控制输入，A_0、A_1、B_0 和 B_1 是已知的具有适当维数的定常实矩阵，$\Delta A_0(\cdot)$、$\Delta A_1(\cdot)$、$\Delta B_0(\cdot)$ 和 $\Delta B_1(\cdot)$ 是不确定矩阵，它们反映了在系统模型中的时变参数不确定性，$d(t)$ 和 $h(t)$ 是任意有界函数，且满足

$$\begin{aligned}&0 \leqslant d(t) \leqslant d^* < \infty, \quad \dot{d}(t) \leqslant \rho_d < 1\\ &0 \leqslant h(t) \leqslant h^* < \infty, \quad \dot{h}(t) \leqslant \rho_h < 1\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

$\varphi(t) \in C^n[-\max(d^*, h^*), 0]$ 是实向量值连续初始函数。

本节所考虑的参数不确定性假定是范数有界的，且具有以下形式：

$$\begin{aligned}&[\Delta A_0(t) \quad \Delta B_0(t)] = HF(t)[E_1 \quad E_2] \\ &\Delta A_1(t) = H_1F(t)D_1, \quad \Delta B_1(t) = H_2F(t)D_2\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

其中，H、H_1、H_2、E_1、E_2、D_1 和 D_2 是已知的具有适当维数的实常数矩阵，它们反映了系统不确定性的结构，$F(t) \in R^{i\times j}$ 是具有 Lebesgue 可测元的不确定矩阵，且满足

$$F'(t)F(t) \leqslant I \tag{3.4.4}$$

进而，假定矩阵 A_1 和 B_1 可以分解成 $A_1 = A_{11}A_{12}, B_1 = B_{11}B_{12}$，其中，$A_{11} \in R^{n\times r_a}$，$A_{12} \in R^{r_a\times n}$，$B_{11} \in R^{n\times r_b}, B_{12} \in R^{r_b\times m}$，$r_a = \text{rank}(A_1)$，$r_b = \text{rank}(B_1)$，注意到这样的分解总是可能的，然而却不是唯一的，例如，$A_1 = A_{11}A_{12} = (A_{11}C)(C^{-1}A_{12})$，其中 $C \in R^{r_a\times r_a}$ 是任意非奇异矩阵。

本节的目的是要设计一个无记忆的线性状态反馈控制律 $u(t) = -Kx(t)$，其中 $K \in R^{m\times n}$ 是一个常数矩阵，使得对所有允许的不确定性，导出的闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &[A_0 - B_0K + HF(t)(E_1 - E_2K)]x(t) \\ &+ [A_1 + H_1F(t)D_1]x(t - d(t)) - [B_1 + H_2F(t)D_2]Kx(t - h(t))\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

是鲁棒二次稳定的。

我们首先给出此类不确定时滞系统鲁棒二次稳定性的概念。

定义 3.4.1　如果存在一个对称正定矩阵 $P \in R^{n\times n}$，对称半正定矩阵 $R, W \in R^{n\times n}$ 和一个常数 a>0，使得 Lyapunov 泛函

$$V(x_t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x'(\tau)Rx(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t-h(t)}^{t} x'(\tau)Wx(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.4.6}$$

沿闭环系统(3.4.5)的任意轨线，它对时间的导数

$$\begin{aligned}L(x_t, t) := &x'(t)[P(A_0 - B_0K) + (A_0 - B_0K)'P + R + W]x(t) \\ &+ 2x'(t)PHF(t)(E_1 - E_2K)x(t) + 2x'(t)P[A_1 + \Delta A_1]x(t - d(t)) \\ &- 2x'(t)P[B_1 + \Delta B_1]Kx(t - h(t)) - x'(t - d(t))Rx(t - d(t))(1 - \dot{d}(t)) \\ &- x'(t - h(t))Wx(t - h(t))(1 - \dot{h}(t)) \\ \leqslant &-\alpha(x(t))^2\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

对所有允许的不确定性成立，则不确定时滞系统(3.4.1)称为是鲁棒二次稳定的。

对不确定时滞系统(3.4.1)，若存在控制律 $u(t) = -Kx(t)$，使得导出的闭环系统是

鲁棒二次稳定的，则不确定系统(3.4.1)称为是鲁棒二次能镇定的，此时，控制律 $u(t)=-Kx(t)$，称为系统(3.4.1)的一个鲁棒二次稳定化无记忆状态反馈控制律。

根据时滞系统的稳定性理论，如果一个时滞系统是二次稳定的，那么，该系统的平衡状态是大范围一致渐近稳定的。

以下的定理给出了不确定时滞系统鲁棒二次能稳定的一个充分条件。

定理 3.4.1　对不确定时滞系统(3.4.1)，如果存在一个常数矩阵 $K\in R^{m\times n}$，使得矩阵不等式

$$
\begin{aligned}
S:=\;& PA_c+A_c'P+P(HH'+H_1H_1'+H_2H_2'+A_{11}A_{11}'+B_{11}B_{11}')P\\
&+(E_1-E_2K)'(E_1-E_2K)+\frac{1}{1-\rho_d}(A_{12}'A_{12}+D_1'D_1)\\
&+\frac{1}{1-\rho_h}K'(B_{12}'B_{12}+D_2'D_2)K<0
\end{aligned}
\tag{3.4.8}
$$

有一个对称正定解 P，则不确定时滞系统(3.4.1)是鲁棒二次能镇定的，且矩阵 K 就是系统(3.4.1)的一个鲁棒二次稳定化反馈增益矩阵，其中 $A_c=A_0-B_0K$。

证明　如果存在对称正定矩阵 P 满足(3.4.8)，取控制律 $u(t)=-Kx(t)$，则相应的闭环系统是(3.4.5)。考虑 Lyapunov 泛函(3.4.6)，其中矩阵 R 和 W 取成

$$
R=\frac{1}{1-\rho_d}(A_{12}'A_{12}+D_1'D_1)\geqslant 0,\quad W=\frac{1}{1-\rho_h}K'(B_{12}'B_{12}+D_2'D_2)K\geqslant 0 \tag{3.4.9}
$$

显然 $V(x_t)$ 是正定的，$V(x_t)$ 相应于系统(3.4.5)的时间导数是

$$
\begin{aligned}
L(x_t,t)=\;& x'(t)[PA_c+A_c'P+\frac{1}{1-\rho_d}(A_{12}'A_{12}+D_1'D_1)+\frac{1}{1-\rho_h}K'(B_{12}'B_{12}+D_2'D_2)K]x(t)\\
&+2x'(t)PHF(t)(E_1-E_2K)x(t)+2x'(t)PA_{11}A_{12}x(t-d(t))\\
&+2x'(t)PH_1F(t)D_1x(t-d(t))-2x'(t)PB_{11}B_{12}Kx(t-h(t))\\
&-2x'(t)PH_2F(t)D_2Kx(t-h(t))\\
&-\frac{1}{1-\rho_d}x'(t-d(t))(A_{12}'A_{12}+D_1'D_1)x(t-d(t))(1-\dot{d}(t))\\
&-\frac{1}{1-\rho_h}x'(t-h(t))K'(B_{12}'B_{12}+D_2'D_2)Kx(t-h(t))(1-\dot{h}(t))
\end{aligned}
\tag{3.4.10}
$$

根据引理 3.2.1，可得

$$2x'(t)PHF(t)(E_1 - E_2K)x(t) \leqslant x'(t)PHH'Px(t) + x'(t)(E_1 - E_2K)'(E_1 - E_2K)x(t)$$
$$2x'(t)PA_{11}A_{12}x(t-d(t)) \leqslant x'(t)PA_{11}A'_{11}Px(t) + x'(t-d(t))A'_{12}A_{12}x(t-d(t))$$
$$2x'(t)PH_1F(t)D_1x(t-d(t)) \leqslant x'(t)PH_1H'_1Px(t) + x'(t-d(t))D'_1D_1x(t-d(t))$$
$$-2x'(t)PB_{11}B_{12}Kx(t-h(t)) \leqslant x'(t)PB_{11}B'_{11}Px(t) + x'(t-h(t))K'B'_{12}B_{12}Kx(t-h(t))$$
$$-2x'(t)PH_2F(t)D_2Kx(t-h(t)) \leqslant x'(t)PH_2H'_2Px(t) + x'(t-h(t))K'D'_2D_2Kx(t-h(t))$$

将以上不等代入到式(3.4.10)，利用式(3.4.2)和式(3.4.8)，得到

$$L(x_t, t) \leqslant x'(t)Sx(t) \leqslant \lambda_{\max}(S)\|x(t)\|^2 < 0$$

其中，$\lambda_{\max}(S)$ 表示矩阵 S 的最大特征值。

因此，对 $\alpha = -\lambda_{\max}(S) > 0$，不等式(3.4.7)成立。

根据定义 3.4.1 知，系统(3.4.1)是鲁棒二次稳定的。证毕。

令

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} H & H_1 & H_2 & A_{11} & B_{11} \end{bmatrix}$$
$$\bar{E}_1 = \begin{bmatrix} E'_1 & \frac{1}{\sqrt{1-\rho_d}}A'_{12} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho_d}}D'_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3.4.11}$$
$$\bar{E}_2 = \begin{bmatrix} E'_2 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\rho_h}}B'_{12} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho_h}}D'_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则矩阵不等式(3.4.8)可以重新写成

$$PA_c + A'_cP + P\bar{D}\bar{D}'P + (\bar{E}_1 - \bar{E}_2K)'(\bar{E}_1 - \bar{E}_2K) < 0 \tag{3.4.12}$$

设 $r = \operatorname{rank}(\bar{E}_2)$，$U \in R^{(3j+r_a+r_b)\times r}$，$V \in R^{r\times m}$ 是满足

$$\bar{E}_2 = UV, \qquad \operatorname{rank}(U) = \operatorname{rank}(V) = r \tag{3.4.13}$$

的任意矩阵。矩阵 $\Phi \in R^{(m-r)\times m}$ 满足

$$\Phi V^{\mathrm{T}} = 0, \quad \Phi\Phi' = I \quad (\Phi = 0 \quad \text{如果} \quad r = m) \tag{3.4.14}$$

定义

$$\Xi = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}V \tag{3.4.15}$$

则根据推论 3.2.2，不难得到定理 3.4.2。

定理 3.4.2 如果存在一个常数 $\varepsilon > 0$，使得 Riccati 方程

$$\begin{aligned}&(A_0-B_0\Xi E_2'E_1)'P+P(A_0-B_0\Xi E_2'E_1)+P(HH'+H_1H_1'+H_2H_2'+A_{11}A_{11}'+B_{11}B_{11}'\\&\quad -B_0\Xi B_0'-\frac{1}{\varepsilon}B_0\Phi'\Phi B_0')P+E_1'(I-E_2\Xi E_2')E_1+\frac{1}{1-\rho_d}(A_{12}'A_{12}+D_1'D_1)+\varepsilon I=0\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

有一个对称正定解 P，则不确定时滞系统(3.4.1)可以用一个无记忆线性状态反馈鲁棒二次镇定，且

$$u(t)=-Kx(t) \tag{3.4.17}$$

其中

$$K=\left(\frac{1}{2\varepsilon}\Phi'\Phi+\Xi\right)B_0'P+\Xi E_2'E_1 \tag{3.4.18}$$

是系统(3.4.1)的一个鲁棒二次稳定化无记忆状态反馈控制律。反之，如果定理 3.4.1 中的不确定时滞系统鲁棒二次能镇定的充分条件成立，即存在一个常数矩阵 $K\in R^{m\times n}$ 使得矩阵不等式(3.4.8)成立，则存在一个常数 $\varepsilon^*>0$，使得对所有 $\bar{\varepsilon}\in(0,\varepsilon^*]$，Riccati 矩阵方程(3.4.16)有一个对称正定解。

根据 3.2 节中的算法 3.2.1，可以得到不确定时滞系统(3.4.1)的鲁棒二次稳定化无记忆线性状态反馈控制律的设计方法。

3.5　秩 1 型不确定线性时滞系统的鲁棒控制

考查下面的秩 1 型不确定线性时滞连续系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&\left[A_0+\Delta A(r(t))\right]x(t)+\left[A_{d0}+\Delta A_d(v(t))\right]x(t-d(t))\\&+\left[B_0+\Delta B(s(t))\right]u(t)+\left[B_{d0}+\Delta B_d(z(t))\right]u(t-h(t))\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

秩 1 型描述

$$\Delta A(r(t))=\sum_{i=1}^{k_1}A_ir_i(t),\quad \Delta B(s(t))=\sum_{i=1}^{k_2}B_is_i(t) \tag{3.5.2}$$

$$\Delta A_d(v(t))=\sum_{i=1}^{k_3}A_{di}v_i(t),\quad \Delta B_d(z(t))=\sum_{i=1}^{k_4}B_{di}z_i(t) \tag{3.5.3}$$

A_i、B_i 和 A_{di}、B_{di} 具有下面的形式：

$$A_i=d_ie_i^{\mathrm{T}},\quad B_i=f_ig_i^{\mathrm{T}} \tag{3.5.4}$$

$$A_{di}=l_i q_i^{\mathrm{T}}, \quad B_{di}=h_i w_i^{\mathrm{T}} \tag{3.5.5}$$

其中，$d_i, e_i, f_i, l_i, q_i, h_i \in R^n$；$g_i^{\mathrm{T}} w_i^{\mathrm{T}} \in R^m$。

引入下面的记号：

$$T \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{r}\sum_{i=1}^{k_1} d_i d_i^{\mathrm{T}}, \quad U \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{r}\sum_{i=1}^{k_1} e_i e_i^{\mathrm{T}} \tag{3.5.6}$$

$$V \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{s}\sum_{i=1}^{k_2} g_i g_i^{\mathrm{T}}, \quad W \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{s}\sum_{i=1}^{k_2} f_i f_i^{\mathrm{T}} \tag{3.5.7}$$

$$H \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{v}\sum_{i=1}^{k_3} l_i l_i^{\mathrm{T}}, \quad M \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{v}\sum_{i=1}^{k_3} q_i q_i^{\mathrm{T}} \tag{3.5.8}$$

$$X \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{z}\sum_{i=1}^{k_4} h_i h_i^{\mathrm{T}}, \quad Y \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{z}\sum_{i=1}^{k_4} w_i w_i^{\mathrm{T}} \tag{3.5.9}$$

考虑下面的 Riccati 方程：

$$PA_0 + A_0^{\mathrm{T}} P - P\hat{R}P + U + \frac{1}{1-\bar{m}_1} M + \frac{1}{1-\bar{m}_1} I_n + \varepsilon Q = 0 \tag{3.5.10}$$

$$\begin{aligned}\hat{R} \overset{\text{def}}{=\!=} & \frac{1}{\varepsilon}(B_0 R_0^{-1} B_0^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\bar{m}_2} B_{d0} R_0^{-1} B_{d0}^{\mathrm{T}} - B_0 R_0^{-1} \\ & \times (V+Y) R_0^{-1} B_0^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\bar{m}_2} X - W) \\ & - T - H - A_{d0} A_{d0}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

其中，ε 是正常数，I_n 为单位矩阵，$R_0 \in R^{m\times m}$ 和 $Q \in R^{n\times n}$ 是正定对称矩阵。

假设反馈控制律为

$$u = -\frac{1}{\varepsilon} R_0^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P x(t) \tag{3.5.12}$$

则系统(3.5.1)的闭环反馈系统为

$$\dot{x}(t)=[A_0+\Delta A(r(t))]x(t)-\frac{1}{\varepsilon}[B_0+\Delta B(s(t))]R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px(t)$$
$$+[A_{d0}+\Delta A_d(v(t))]x(t-\tau_1(t))-\frac{1}{\varepsilon}[B_{d0}+\Delta B_d(z(t))]R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px(t-\tau_2(t)) \quad (3.5.13)$$
$$x(t)=0,\quad t<0,\quad x(0)=x_0$$

选择 Lyapunov 泛函为

$$L(t)=x^{\mathrm{T}}Px+\frac{1}{1-\bar{m}_1}\int_{t-\tau_1}^{t}x(\theta)^{\mathrm{T}}(I_n+M)x(\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\tau_2}^{t}x(\theta)^{\mathrm{T}}PB_0(R_0^{-1}+R_0^{-1}YR_0^{-1})B_0^{\mathrm{T}}Px(\theta)\mathrm{d}\theta \quad (3.5.14)$$

由 $c_1,c_2>0$ 和

$$c_1\|x(t)\|^2\leqslant L(t)\leqslant \sup_{-\bar{\tau}\leqslant\theta\leqslant 0} c_2\|x(t+\theta)\|^2 \quad (3.5.15)$$

得到 L 沿着(3.5.13)的导数如下：

$$\dot{L}=2x^{\mathrm{T}}P(A_0x+\Delta Ax-\frac{1}{\varepsilon}B_0R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px-\frac{1}{\varepsilon}\Delta B_0R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px)$$
$$+2x^{\mathrm{T}}P(A_{d0}x_{\tau_1}+\Delta A_dx_{\tau_1}-\frac{1}{\varepsilon}B_{d0}R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px_{\tau_2}-\frac{1}{\varepsilon}\Delta B_dR_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px_{\tau_2})$$
$$+\frac{1}{1-\bar{m}_1}x^{\mathrm{T}}(I_n+M)x-\frac{1-\dot{\tau}_1}{1-\bar{m}_1}x_{\tau_1}^{\mathrm{T}}(I_n+M)x_{\tau_1}+\frac{1}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PB_0(R_0^{-1}+R_0^{-1}YR_0^{-1})B_0^{\mathrm{T}}Px$$
$$-\frac{1-\dot{\tau}_2}{\varepsilon}x_{\tau_2}^{\mathrm{T}}PB_0(R_0^{-1}+R_0^{-1}YR_0^{-1})B_0^{\mathrm{T}}Px_{\tau_2} \quad (3.5.16)$$

这里，$x_{\tau_1}\overset{\text{def}}{=\!=}x(t-\tau_1)$ 和 $x_{\tau_2}\overset{\text{def}}{=\!=}x(t-\tau_2)$。由不等式 $2|x^{\mathrm{T}}y|\leqslant\alpha x^{\mathrm{T}}x+y^{\mathrm{T}}y/\alpha$ 可得

$$2x^{\mathrm{T}}P\Delta Ax=2x^{\mathrm{T}}P\sum_{i=1}^{k}d_ie_i^{\mathrm{T}}r_i(t)x\leqslant\bar{r}\sum_{i=1}^{k_1}x^{\mathrm{T}}Pd_id_i^{\mathrm{T}}Px+\bar{r}\sum_{i=1}^{k}x^{\mathrm{T}}e_ie_i^{\mathrm{T}}x$$
$$\leqslant x^{\mathrm{T}}PTPx+x^{\mathrm{T}}Ux \quad (3.5.17)$$

$$-2x^{\mathrm{T}}P\Delta B_0R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px=-x^{\mathrm{T}}P\sum_{i=1}^{k_2}f_ig_i^{\mathrm{T}}s_i(t)R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px$$
$$\leqslant x^{\mathrm{T}}PWPx+x^{\mathrm{T}}PR_0^{-1}VR_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px \quad (3.5.18)$$

$$2x^{\mathrm{T}}P\Delta A_d x_{\tau_1} = 2x^{\mathrm{T}}P\sum_{i=1}^{k_3} l_i q_i^{\mathrm{T}} v_i(t) x_{\tau_1} \leqslant x^{\mathrm{T}}PHPx + x_{\tau_1}{}^{\mathrm{T}} M x_{\tau_1} \tag{3.5.19}$$

$$\begin{aligned} -2x^{\mathrm{T}}P\Delta B_d R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} P x_{\tau_2} &= -x^{\mathrm{T}} P \sum_{i=1}^{k_2} h_i w_i{}^{\mathrm{T}} z_i(t) R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} P x_{\tau_2} \\ &\leqslant \frac{1}{1-\bar{m}_2} x^{\mathrm{T}} PWPx + (1-\bar{m}_2) x_{\tau_2}{}^{\mathrm{T}} PB_0 R_0{}^{-1} Y R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} P x_{\tau_2} \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

$$2x^{\mathrm{T}}P\Delta A_{d0} x_{\tau_1} \leqslant x^{\mathrm{T}} P A_{d0} A_{d0}{}^{\mathrm{T}} P x + x_{\tau_1}{}^{\mathrm{T}} x_{\tau_1} \tag{3.5.21}$$

因此式(3.5.16)可以写成

$$\begin{aligned} \dot{L} &\leqslant x^{\mathrm{T}}(PA_0 + A_0{}^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{1-\bar{m}_1} I_n + \frac{1}{1-\bar{m}_1} M + u)x + x^{\mathrm{T}} P(T + A_{d0} A_{d0}{}^{\mathrm{T}} + H)Px \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} x^{\mathrm{T}} P(B_0 R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} - B_0 R_0{}^{-1}(V+Y) R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\bar{m}_2} X - W)Px \\ &\quad - \frac{2}{\varepsilon} x^{\mathrm{T}} P B_{d0} R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} P x_{\tau_2} - \frac{1-\bar{m}_2}{\varepsilon} x_{\tau_2}^{\mathrm{T}} P B_0 R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} P x_{\tau_2} \\ &= x^{\mathrm{T}} \hat{S} x - \frac{2}{\varepsilon} x^{\mathrm{T}} P B_{d0} R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} P x_{\tau_2} - \frac{1-\bar{m}_2}{\varepsilon} x_{\tau_2}^{\mathrm{T}} P B_0 R_0{}^{-1} B_0{}^{\mathrm{T}} P x_{\tau_2} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\varepsilon} B_0{}^{\mathrm{T}} x_{\tau_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \hat{S} & -PB_{d0} R_0{}^{-1} \\ -R_0{}^{-1} B_{d0}{}^{\mathrm{T}} P & -(1-\bar{m}_2)\varepsilon R_0{}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\varepsilon} B_0{}^{\mathrm{T}} x_{\tau_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.5.22}$$

其中

$$\hat{S} \overset{\mathrm{def}}{=} PA_0 + A_0{}^{\mathrm{T}} P - P[\hat{R} + \frac{1}{\varepsilon(1-\bar{m}_2)} B_{d0} R_0{}^{-1} B_{d0}{}^{\mathrm{T}}]P + \frac{1}{1-\bar{m}_1} M + \frac{1}{1-\bar{m}_1} I_n$$

由文献(Kreindler et al., 1972)得下式成立时，上式负定。

$$PA_0 + A_0{}^{\mathrm{T}} P - P\hat{R}P + U + \frac{1}{1-\bar{m}_1} M + \frac{1}{1-\bar{m}_1} I_n < 0 \tag{3.5.23}$$

证毕。

3.6 多滞后不确定线性时滞系统的鲁棒控制

考虑下面不确定时滞线性系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=[A_0+\Delta A_0(r_0(t))]x(t)+\sum\limits_{i=1}^{q}[A_i+\Delta A_i(r_i(t))]x\left(t-h_i(t)\right)+[B+\Delta B(r_{q+1}(t))]u(t)\\ x(t)=\phi(t),\quad \forall t\in[-h_{\max},0)\end{cases} \tag{3.6.1}$$

其中，$x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$ 分别是系统的状态和控制向量，A 和 B 是给定的具有适当维数的实数矩阵，$\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 是连续的实矩阵值函数，代表参数矩阵的不确定性。其中

$$0<h_i(t)\leqslant h_i<\infty,\quad \dot{h}_i(t)\leqslant d_i<1 \tag{3.6.2}$$

$$h_{\max}=\max_i(h_i),\quad d_{\max}=\max_i(d_i) \tag{3.6.3}$$

$$u(t)=-\rho B^{\mathrm{T}}Px(t),\qquad \rho>0 \tag{3.6.4}$$

下面的定理给出了不确定时滞系统(3.6.1)鲁棒镇定的充分条件。

定理 3.6.1　如果存在常数 $\varepsilon_i>0$，$i=0,\cdots,q+1,\lambda_j>0,j=0,\cdots,q,\rho>0$ 和矩阵 $P>0$ 满足

$$M_1=A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0-PSP+T<0 \tag{3.6.5}$$

则无记忆反馈控制律 $u(t)=-\rho B^{\mathrm{T}}Px(t)$ 二次镇定不确定时滞系统(3.6.1)。这里有

$$S=\rho(2-\varepsilon_{q+1})BB^{\mathrm{T}}-\varepsilon_0 I-\frac{\rho}{\varepsilon_{q+1}}\bar{B}^2B-\sum_{i=1}^{q}\frac{\lambda_i}{(1-d_i)}\left[(1+\varepsilon_i)A_iA_i^{\mathrm{T}}+\left(1+\frac{1}{\varepsilon_i}\right)\bar{A}_i^2\right] \tag{3.6.6}$$

$$T=\frac{1}{\varepsilon_0}\bar{A}_0^2+\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\lambda_i}I \tag{3.6.7}$$

其中，矩阵 $\bar{A}_i\in R^{n\times n}\geqslant 0,i=0,\cdots,q,\bar{B}\geqslant 0$, 且有

$$\bar{A}_i^2\geqslant \Delta A_i(r_i(t))\Delta A_i^{\mathrm{T}}(r_i(t)),\quad \forall r_i(t),\quad i=0,\cdots q \tag{3.6.8}$$

$$\bar{B}^2\geqslant \Delta B(r_{q+1}(t))\Delta B^{\mathrm{T}}(r_{q+1}(t)),\quad \forall r_{q+1}(t) \tag{3.6.9}$$

证明　把无记忆反馈控制律 $u(t)=-\rho B^{\mathrm{T}}Px(t)$ 代入原系统(3.6.1)中得

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A_0 + \Delta A_0(r_0) - \rho\left(B + \Delta B\left(r_{q+1}\right)\right)B^{\mathrm{T}}P]x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q}\left(A_i + \Delta A_i(t)\right)x\left(t - h_i(t)\right) \\ &= A_c x(t) + \sum_{i=1}^{q}\hat{A}_i x\left(t - h_i(t)\right)\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

定义 Lyapunov 函数为

$$V(t,x) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \sum_{i=1}^{q}\int_{t-h_i(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(\sigma)P_i x(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{3.6.11}$$

容易得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= x^{\mathrm{T}}(t)(A_c{}^{\mathrm{T}}P + PA_c + \sum_{i=1}^{q}P_i)x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)P\sum_{i=1}^{q}\hat{A}_i x\left(t - h_i(t)\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{q}(1 - \dot{h}_i(t))x^{\mathrm{T}}\left(t - h_i(t)\right)P_i x\left(t - h_i(t)\right) \\ &\leqslant z^{\mathrm{T}}(t)S_2 z(t) = z^{\mathrm{T}}(t)TS_1T^{\mathrm{T}}z(t)\end{aligned} \tag{3.6.12}$$

其中

$$z(t) = [x^{\mathrm{T}}(t),\quad x^{\mathrm{T}}\left(t - h_i(t)\right),\quad \cdots,\quad x^{\mathrm{T}}\left(t - h_q(t)\right)]^{\mathrm{T}}$$

$$T = \begin{bmatrix} I & -P\hat{A}_1\hat{P}_1^{-1} & -P\hat{A}_2\hat{P}_2^{-1} & \cdots & -P\hat{A}_q\hat{P}_q^{-1} \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \tag{3.6.13}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\hat{P}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{A}_q \end{bmatrix} \tag{3.6.14}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_c^{\mathrm{T}} P + PA_c + \sum_{i=1}^{q} P_i & P\hat{A}_1 & \cdots & P\hat{A}_q \\ \hat{A}_1^{\mathrm{T}} P & -\hat{P} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{A}_q^{\mathrm{T}} P & 0 & \cdots & -\hat{A}_q \end{bmatrix} < 0 \tag{3.6.15}$$

$$\begin{aligned} M_0 = &(A_0 + \Delta A_0)^{\mathrm{T}} P + P(A_0 + \Delta A_0) \\ &- \rho P(2BB^{\mathrm{T}} + B\Delta B^{\mathrm{T}} + \Delta BB^{\mathrm{T}})P \\ &+ \sum_{i=1}^{q} P(A_i + \Delta A_i)\hat{P}_i^{-1}(A_i + \Delta A_i)^{\mathrm{T}} P + \sum_{i=1}^{q} P_i \end{aligned} \tag{3.6.16}$$

因此如果 $M_0 < 0$,则 $\dot{V}(t,x) < 0$ 。进而得出闭环系统时滞独立渐近稳定。

根据下面的不等式：对于实矩阵 $X, Y \in R^{m\times n}$ 有

$$X^{\mathrm{T}} Y + Y^{\mathrm{T}} X \leqslant \alpha X^{\mathrm{T}} X + \frac{1}{\alpha} Y^{\mathrm{T}} Y, \quad \alpha > 0 \tag{3.6.17}$$

得到

$$\Delta A_0^{\mathrm{T}} P + P\Delta A_0 \leqslant \varepsilon_0 PP + \frac{1}{\varepsilon_0} \Delta A_0^{\mathrm{T}} \Delta A_0 \leqslant \varepsilon_0 PP + \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{A}_0^2 \tag{3.6.18}$$

$$\begin{aligned} A_i \Delta A_i^{\mathrm{T}} + \Delta A_i A_i^{\mathrm{T}} &\leqslant \varepsilon_i A_i A_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} \Delta A_i \Delta A_i^{\mathrm{T}} \\ &\leqslant \varepsilon_i A_i A_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} \bar{A}_i^2 \end{aligned} \tag{3.6.19}$$

$$\begin{aligned} -B\Delta B^{\mathrm{T}} - \Delta BB^{\mathrm{T}} &\leqslant \varepsilon_{q+1} BB^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_{q+1}} \Delta B \Delta B^{\mathrm{T}} \\ &\leqslant \varepsilon_{q+1} BB^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_{q+1}} \bar{B}^2 \end{aligned} \tag{3.6.20}$$

令 $P = (1/\lambda_i)I, i = 1, \cdots, q$,得到

$$\begin{aligned} M_0 \leqslant &A_0^{\mathrm{T}} P + PA_0 + \varepsilon_0 PP + \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{A}_0^2 + \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\lambda_i} I \\ &- \rho P[(2 - \varepsilon_{q+1})BB^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\varepsilon_{q+1}} \bar{B}^2]P \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{q}\frac{\lambda_i}{(1-d_i)}P[(1+\varepsilon_i)A_iA_i^{\mathrm{T}}+(1+\frac{1}{\varepsilon_i})\bar{A}_i^2]P \\
&=M
\end{aligned} \tag{3.6.21}
$$

显然地,如果 $M_1<0$,那么 $M_0<0$,进而不确定系统鲁棒渐近稳定，证毕。

3.7 注　记

本章重点研究了具有状态时滞和控制时滞的一类时滞不确定连续系统的鲁棒镇定问题。3.1 节是引言部分，给出了当前关于时滞系统的时滞独立研究现状。3.2 节介绍了不确定线性系统的鲁棒控制，给出了不确定的 4 种描述模型，并给出了二次稳定的定义。同时针对不含时滞的参数不确定系统，以 Riccati 的形式给出了其二次稳定的条件。3.3~3.6 节分别针对匹配不确定、秩 1 型不确定和多滞后不确定线性时滞系统给出了相应的鲁棒二次镇定的条件,所得的结论均以 Riccati 方程的形式给出。

本章的主要内容来源于作者的研究成果。

参 考 文 献

苏宏业，王景成. 1998. 一类不确定动态时滞系统的无记忆鲁棒镇定控制. 自动化学报, 24(4)：497-501.

苏宏业，俞立. 1998. 不确定时滞系统无记忆鲁棒镇定控制. 控制理论与应用, 15(5)：769-773.

朱晓东，孙优贤. 1996. 不确定动态时滞系统的基于观测器的鲁棒镇定设计. 控制理论与应用，13(2):254-257.

Barmish B R. 1985. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain systems. J. Optim. Theory Appl.,46(4):399-408.

Boyd S, Ghaoui LT1, Feron E, Balakrishnan V. 1994. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. SIAM, Philadelphia.

Choi H H, Chung M J. 1995. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls. Automatica, 31(9):1349-1351.

Jabbari F, Schmitendorf W E. 1991. Robust linear controllers using observers. IEEE Trans. Auto. Contr., 36(12): 1509-1514.

Kimura H. 1984. Robust stability for a class of transfer functions. IEEE Trans. Auto. Contr., 29(9):788-793.

Kreindler E, Jameson A. 1972. Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices. IEEE Trans. Auto. Contr. AC-17: 147-148.

Leitmann G. 1979. Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties. ASME J. Dynamical Systems, Measurement and Control, 101:212-216.

Li X, de Souza C E. 1996. Criteria for robust stability of uncertain linear systems with time-varying state delays. 13th World Congress of IFAC, San Francisco, USA, June 30-July 5, 137-142.

Mahmoud M S, Al-muthairi N F. 1994. Quadratic stabilization of continuous time systems with state-delay and norm-bounded time-varying uncertainties. IEEE Trans. Auto. Contr., 39(10):2135-2139.

Packard A, Doyle J C. 1990. Quadratic stability with real and complex perturbations. IEEE Trans. Auto. Contr., 35(2):198-201.

Schmitendorf W E. 1988. Design of observer-based robust stabilizing controllers. Automatica, 24(5):693-696.

Su H Y, Chu J, Wang J C. 1997. Dynamic output feedback stabilizing control for linear time-varying uncertain systems with delayed state and control. 36th IEEE Conference on Decision & Control, Hyatt Regency San Diego, California, USA, 4562-4567.

Su H Y, Chu J, Wang J C. 1998a. A memoryless robust stabilizing controller for a class of uncertain linear time-delay systems. Int J of System Science, 29(2)：191-197.

Su H Y, Chu J. 1999. Robust control for linear time-varying uncertain time- delay systems via dynamic output feedback. Int J. of System Science, 30(10)：1093-1107.

Su H Y, Wang J C, Chu J. 1998b. Memoryless robust stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 19(11): 497-501.

Su H Y, Wang J C, Yu L, Chu J.1998c. Robust H infinity controller design for time-varying uncertain linear systems with time-varying state and control delays, International Journal of Systems Science, 29(8): 863-872.

Tseng C L, Fong I K, Su J H. 1994. Robust stability analysis for uncertain delay systems with output feedback controller. Syst. Contr. Lett., 23:271-278.

Xie L, Fu M, de Souza. 1992. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback. IEEE Trans. Auto. Contr., 37:1253-1256.

第4章　基于LMI的不确定线性时滞系统的鲁棒控制

4.1　引　　言

近年来，对具有有界不确定参数线性系统的鲁棒稳定性分析以及鲁棒镇定问题一直是控制理论研究的热点之一，并有了很多结果(Leitmann，1979; Barmish, 1985 ; Petersen et al., 1986; Petersen, 1987 ; Zhou et al., 1988)。在 Petersen 等(1986)、Petersen(1987)和 Zhou 等(1988)的文献中，基于鲁棒二次镇定的概念，针对一类具有不满足匹配条件的不确定参数的线性系统，提出一种基于 Riccati 方程的镇定方法，即通过求解一个代数 Riccati 方程就能得到无记忆线性状态反馈控制器的增益矩阵。该方法随即被扩展来处理具有状态时滞和含有秩一不确定性的线性系统的鲁棒控制问题，最终得到无记忆线性状态反馈控制器(Hollot et al., 1986；俞立, 1991)，而 Phoojaruenchanachai 等(1992)、Mahmoud 等(1994)和 Choi (1994) 分别将该方法扩展至具有状态时滞或控制时滞不确定系统的鲁棒控制问题。Choi 等(1995)、Kim 等(1996)、Yu 等(1997)和 Su 等(1998)则研究了同时具有时变状态时滞和时变控制时滞的不确定系统的鲁棒控制问题，前者所研究系统的不确定参数为秩一分解型，而后两个所研究系统的不确定参数为范数有界形式。

Chio 等(1995)、Kim 等(1996)所采用的方法都是预先假定状态反馈控制器具有依赖于某个 Riccati 方程对称正定解的给定结构，这种假设不可避免带来保守性。虽然 Yu 等(1997)、Su 等(1998)所采用的方法避免了上述问题，但同 Choi 等(1995)、Kim 等(1996)一样，在采用 Lyapunov 第二方法时都采用了矩阵不等式的放大技术，因此得到的系统鲁棒可镇定的条件只是充分的。而且以上方法的结果都以 Riccati 方程的形式给出，其求解涉及多个对称正定矩阵和标量的镇定问题。由于没有系统的镇定方法，求解过程中会带来一定的保守性。

Esfahni 等(1998)给出一个线性不确定时滞系统的状态反馈可镇定的充要条件，由于其所考虑的系统只有状态滞后，有一定的局限性，本章将该方法推广到同时具有状态和控制滞后的线性不确定时滞系统，得到一个系统鲁棒二次可镇定的充要条件。

由于秩一分解和范数有界形式的系统不确定参数模型对有些实际系统的不确定参数的描述是不方便的甚至是不可能的，而凸多面体形式的不确定参数模型可以有效的避免上述问题，本章同时研究了具有凸多面体形式不确定参数的线性时

滞系统的鲁棒镇定问题，给出了一个同样是充分必要的系统状态反馈鲁棒可镇定条件以及控制器设计算法。

以上结果都是时滞无关的，允许系统的时滞是任意的大小，对于时变时滞的情况则要求系统的时滞变化率小于 1。但是在很多实际的系统中，系统时滞的范围往往是有界的，这时候应用以上结果会使其变得非常保守，特别是时滞很小的时候；另外一方面，我们可能无法得知实际系统变化率的情况，在这种情况下，以上结果就无法适用。正是由于不依赖于时滞的结果在某些情况下的局限性，一些学者提出了线性不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒稳定判据和鲁棒镇定方法。如 Su 等(1992)、Niculescu 等(1994)和 Li 等(1996a, 1996b)。本节进一步研究了同时具有状态滞后和控制滞后的线性不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定问题，同样分别研究具有范数有界不确定参数和凸多面体不确定参数的线性时滞系统，分别给出了系统时滞依赖鲁棒可镇定的充分条件及相应的状态反馈鲁棒镇定控制器设计方法。

本章所得结果都以矩阵不等式形式给出。对于时滞无关情形，结论以线性矩阵不等式形式给出，其求解可用内点法非常有效地进行。而对于时滞依赖情形，结论以非线性矩阵不等式形式给出，并对非线性矩阵不等式求解出了几种不同的处理方法，同时给出了求解系统最大允许滞后的方法，并给出数值仿真例子。

4.2　具有范数有界不确定参数的线性时滞系统的鲁棒二次稳定

考虑如下的不确定线性时滞系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=(A+\Delta A)x(t)+(A_1+\Delta A_1)x(t-d(t))\\&\quad+(B+\Delta B)u(t)+(B_1+\Delta B_1)u(t-h(t))\\x(t)&=\phi(t),\quad t\in\left[-\max(d(t),h(t)),\ 0\right]\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

其中，$x(t)\in R^n$ 是状态向量，$u(t)\in R^m$ 是控制输入向量，$A\in R^{n\times n}$、$A_1\in R^{n\times n}$、$B\in R^{n\times m}$ 和 $B_1\in R^{n\times m}$ 是已知的实常数矩阵。ΔA、ΔA_1、ΔB 和 ΔB_1 是具有适当维数的实函数矩阵，表示系统的不确定性。$d(t)$ 和 $h(t)$ 分别表示系统的状态滞后和控制滞后，且存在正实数 d^*、h^*、ρ_d 和 ρ_h 使得对所有的 t，满足

$$\begin{aligned}&0\leqslant d(t)\leqslant d^*<\infty,\quad \dot{d}(t)\leqslant\rho_d<1\\&0\leqslant h(t)\leqslant h^*<\infty,\quad \dot{h}(t)\leqslant\rho_h<1\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

并假设 $d(t)\neq h(t),\quad t\in\left[0,\max(d(t),h(t))\right]$。$\phi(t)$ 是定义在 Banach 空间 $C^n[-\tau,0](\tau=\max(d(t),h(t)))$ 上的光滑函数

$$\psi:[-\tau,0]\mapsto R^n,\quad \|\psi\|_\infty:=\sup_{-\tau\leqslant\zeta\leqslant 0}\|\psi(\zeta)\|$$

表示系统的初始条件。

我们假设系统的不确定参数具有如下的形式：

$$\begin{bmatrix}\Delta A & \Delta A_1 & \Delta B & \Delta B_1\end{bmatrix}=HF(t)\begin{bmatrix}E_1 & E_2 & E_3 & E_4\end{bmatrix} \tag{4.2.3}$$

其中，H、E_1、E_2、E_3、E_4 是已知的具有适当维数的实常数矩阵，它们反映了系统不确定性的结构，而 $F(t)\in R^{i\times j}$ 是一个具有 Lebesgue 可测元的未知实矩阵函数，且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I \tag{4.2.4}$$

其中，I 表示适当维数的单位矩阵。为系统描述简便起见，我们引入变量

$$\bar{A}=A+\Delta A,\quad \bar{A}_1=A_1+\Delta A_1,\quad \bar{B}=B+\Delta B,\quad \bar{B}_1=B_1+\Delta B_1$$

我们首先给出无记忆线性状态反馈鲁棒二次可镇定的定义：

定义 4.2.1　针对不确定线性时滞系统(3.2.1)，如果存在一个线性状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$，对称正定矩阵 $P,\ R_1,\ R_2\in R^{n\times n}$ 和一个标量 $\varepsilon>0$ 使得下列条件满足：

对所有允许的不确定性(3.2.4)，给定如下的 Lyapunov 函数：

$$V(x(t),t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-d(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)\mathrm{d}s+\int_{t-h(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(t)R_2x(t)\mathrm{d}s \tag{4.2.5}$$

其中，$P,\ R_1,\ R_2\in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵，对所有的 $(x(t),t)\in R^n\times R,\ t>0$ 及任意的初始条件 $x(t)=\phi(t),\ t\in[-\max(d(t),h(t)),\ 0]$,有

$$\dot{V}(x(t),t)\leqslant-\varepsilon\|x(t)\|^2 \tag{4.2.6}$$

那么称系统(4.2.1)是无记忆线性状态反馈鲁棒二次可镇定的，简称鲁棒二次可镇定的，且控制律 $u(t)=Kx(t)$ 称为系统(4.2.1)~(4.2.3)的一个线性状态反馈鲁棒二次镇定控制律，简称鲁棒二次镇定控制律。

显然，如果系统是鲁棒二次可镇定的，则其闭环系统是大范围一致渐近稳定的，反之则不成立。针对线性不确定时滞系统(4.2.1)，我们将给出一个鲁棒二次可镇定的充分必要条件以及相应的鲁棒二次镇定控制律设计方法。

首先我们给出如下引理：

引理 4.2.1　系统(4.2.1)是鲁棒二次可镇定的，当且仅当存在矩阵 $K \in R^{m\times n}$ ，对称正定矩阵 $P,\ R_1,\ R_2 \in R^{n\times n}$ 和一个标量 $\varepsilon > 0$ 使得对任意允许的不确定性 $F(t)$，满足

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}P + P\bar{B}K + R_1 + R_2 + \varepsilon I & P\bar{A}_1 & P\bar{B}_1K \\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 \\ K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\rho_h)R_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.7)$$

且 $u(t) = Kx(t)$ 为鲁棒二次镇定控制律。

证明　假设存在对称正定矩阵 $P,\ R_1,\ R_2 \in R^{n\times n}$ ，常数矩阵 $K \in R^{m\times n}$ 和标量 $\varepsilon > 0$ ，对于任意满足(3.2.4)的不确定性 $F(t)$ ，使得矩阵不等式(4.2.7)成立，则我们引入无记忆状态反馈控制率 $u(t) = Kx(t)$ 后闭环系统可写为

$$\dot{x}(t) = \left(\bar{A} + \bar{B}K\right)x(t) + \bar{A}_1 x\left(t - d(t)\right) + \bar{B}_1 Kx\left(t - h(t)\right) \quad (4.2.8)$$

考虑如下的 Lyapunov 函数：

$$V\left(x(t),t\right) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)R_1 x(s)\mathrm{d}s + \int_{t-h(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)R_2 x(s)\mathrm{d}s$$

其沿闭环系统(3.2.8)关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}\left(x(t),t\right) &= \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) + x^{\mathrm{T}}(t)(R_1 + R_2)x(t) \\
&\quad -\left(1-\dot{d}(t)\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)R_1 x\left(t-d(t)\right) \\
&\quad -\left(1-\dot{h}(t)\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)R_2 x\left(t-h(t)\right) \\
&= x^{\mathrm{T}}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}Px(t) \\
&\quad + x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}Kx(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\left(R_1 + R_2\right)x(t) \\
&\quad + x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}_1 x\left(t-d(t)\right) \\
&\quad + x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}_1 Kx\left(t-h(t)\right) \\
&\quad -\left(1-\dot{d}(t)\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)R_1 x\left(t-d(t)\right) \\
&\quad -\left(1-\dot{h}(t)\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)R_2 x\left(t-h(t)\right)
\end{aligned}$$

因此 $\dot{V}\left(x(t),t\right) \leqslant -\varepsilon\|x(t)\|^2$ ，等价于

$$
\begin{aligned}
& x^{\mathrm{T}}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}Px(t) \\
& \quad +x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}Kx(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\left(R_1+R_2+\varepsilon I\right)x(t) \\
& \quad +x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}_1x\left(t-d(t)\right) \\
& \quad +x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}_1Kx\left(t-h(t)\right) \\
& \quad -\left(1-\dot{d}(t)\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)R_1x\left(t-d(t)\right) \\
& \quad -\left(1-\dot{h}(t)\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)R_2x\left(t-h(t)\right)<0
\end{aligned}
$$

考虑到条件(4.2.2)，上式等价于

$$
\begin{aligned}
& x^{\mathrm{T}}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}Px(t) \\
& \quad +x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}Kx(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\left(R_1+R_2+\varepsilon I\right)x(t) \\
& \quad +x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}_1x\left(t-d(t)\right) \\
& \quad +x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}_1Kx\left(t-h(t)\right) \\
& \quad -\left(1-\rho_d\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)R_1x\left(t-d(t)\right) \\
& \quad -\left(1-\rho_h\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)R_2x\left(t-h(t)\right)<0
\end{aligned}
$$

显然上式可以写为

$$
\begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}}(t) & x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right) & x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right) \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} x(t) \\ x\left(t-d(t)\right) \\ x\left(t-h(t)\right) \end{bmatrix}<0 \tag{4.2.9}
$$

其中

$$
W=\begin{bmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}}P+P\bar{A}+K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}P+P\bar{B}K+R_1+R_2+\varepsilon I & P\bar{A}_1 & P\bar{B}_1K \\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P & -\left(1-\rho_d\right)R_1 & 0 \\ K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -\left(1-\rho_h\right)R_2 \end{bmatrix} \tag{4.2.10}
$$

对所有的 $(x(t),t)\in R^n\times R,\ t>0$ 及任意的初始条件 $x(t)=\phi(t)$，$t\in\left[-\max\left(d(t),h(t)\right),0\right]$，$d(t)\neq h(t)$，$t\in\left[0,\max\left(d(t),h(t)\right)\right]$不等式(4.2.9)都必须满足，显然其等价于$W<0$。

由鲁棒二次可镇定的定义可知，系统(4.2.1)是鲁棒二次可镇定的，且$u(t)=Kx(t)$为一鲁棒二次镇定控制律。

在本节主要结论的证明过程中，我们需要如下引理：

引理 4.2.2　给定对称正定矩阵 $A, C \in R^{q\times q}$ 及对称负定矩阵 $B \in R^{q\times q}$，有

$$\left(w^{\mathrm{T}}Bw\right)^2 - 4w^{\mathrm{T}}Aww^{\mathrm{T}}Cw > 0$$

则存在标量 $\lambda > 0$，使得

$$\lambda^2 A + \lambda B + C > 0$$

下面给出本节的主要结论：

定理 4.2.1　不确定线性时滞系统(3.2.1)是鲁棒二次可镇定的，当且仅当存在矩阵 $Y \in R^{m\times n}$，对称正定矩阵 $X, Q_1, Q_2 \in R^{m\times n}$ 和标量 $\alpha > 0, \beta > 0$ 使得式(4.2.11)满足：

$$\begin{bmatrix} S & A_1X & B_1Y & XE_1^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & X \\ XA_1^{\mathrm{T}} & -(1-\rho_d)Q_1 & 0 & XE_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -(1-\rho_d)Q_2 & Y^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}} & 0 \\ E_1X + E_3Y & E_2X & E_4Y & -\alpha I & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.2.11}$$

其中

$$S = XA^{\mathrm{T}} + AX + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + BY + Q_1 + Q_2 + \alpha HH^{\mathrm{T}}$$

如果上式满足，则控制律

$$u(t) = YX^{-1}x(t) \tag{4.2.12}$$

为一鲁棒二次镇定控制律。

证明　由引理 4.2.1，系统(4.2.1)~(4.2.3)是鲁棒二次可镇定，当且仅当存在矩阵 $K \in R^{m\times n}$，对称正定矩阵 $P, R_1, R_2 \in R^{n\times n}$ 和一个标量 $\varepsilon > 0$ 使得对任意允许的不确定性 $F(t)$，满足

$$W = \begin{bmatrix} S_1 & P\overline{A}_1 & P\overline{B}_1K \\ \overline{A}_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 \\ K^{\mathrm{T}}\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\rho_h)R_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.2.13}$$

其中，$S_1 = \overline{A}^{\mathrm{T}}P + P\overline{A} + K^{\mathrm{T}}\overline{B}^{\mathrm{T}}P + P\overline{B}K + R_1 + R_2 + \varepsilon I$。显然，不等式(4.2.13)可写成

$$W = L + \Delta L \leqslant 0 \tag{4.2.14}$$

其中，标称项为

$$L = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P + PBK + R_1 + R_2 + \varepsilon I & PA_1 & PB_1K \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 \\ K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\rho_h)R_2 \end{bmatrix}$$

不确定项为

$$\Delta L = \begin{bmatrix} (E_1 + E_3K)^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}P + PHF(t)(E_1 + E_3K) & PHF(t)E_2 & PHF(t)E_4K \\ (HF(t)E_2)^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 \\ K^{\mathrm{T}}(HF(t)E_4)^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PH \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)\begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} PH \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)\begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

不等式(4.2.14)等价于对任意具有恰当维数的非零向量ξ，有

$$\xi^{\mathrm{T}}W\xi = \xi^{\mathrm{T}}L\xi + \xi^{\mathrm{T}}\Delta L\xi < 0 \tag{4.2.15}$$

显然

$$\xi^{\mathrm{T}}\Delta L\xi = 2\xi^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} PH \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)\begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K \end{bmatrix}\xi$$

而且上式在

$$F(t) = \left(\begin{bmatrix} PH & 0 & 0 \end{bmatrix}\xi\xi^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} (E_1 + E_3K)^{\mathrm{T}} \\ E_2^{\mathrm{T}} \\ (E_4K)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \right) \Big/ \left\| \begin{bmatrix} PH & 0 & 0 \end{bmatrix}\xi \right\| \left\| \begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K \end{bmatrix}\xi \right\|$$

时取得最大值，对于此$F(t)$值，不等式(4.2.15)必须满足，即

$$\xi^{\mathrm{T}}W\xi = \xi^{\mathrm{T}}L\xi + 2\sqrt{\xi^{\mathrm{T}}L_1\xi\xi^{\mathrm{T}}L_2\xi} < 0 \tag{4.2.16}$$

其中

$$L_1 = \begin{bmatrix} PH \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PHH^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} (E_1 + E_3K)^{\mathrm{T}} \\ E_2^{\mathrm{T}} \\ (E_4K)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K \end{bmatrix}$$

显然须有 $L<0$，且 $\left(\xi^{\mathrm{T}}L\xi\right)^2 - 4\xi^{\mathrm{T}}L_1\xi\xi^{\mathrm{T}}L_2\xi > 0$。由引理 4.2.2，存在标量 $\alpha>0$ 使得

$$L + \alpha L_1 + \frac{1}{\alpha}L_2 = \begin{bmatrix} S_1 & PA_1 & PB_1K \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 \\ K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\rho_h)R_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} (E_1 + E_3K)^{\mathrm{T}} \\ E_2 \\ E_4K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K \end{bmatrix} < 0 \tag{4.2.17}$$

其中

$$S_1 = A^{\mathrm{T}}P + PA + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + BK + R_1 + R_2 + \alpha PHH^{\mathrm{T}}P$$

由引理 4.2.3，对任意的标量 $\alpha>0$，

$$\begin{aligned} \xi^{\mathrm{T}}\Delta L\xi &= 2\xi^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} PH \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)\begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K \end{bmatrix}\xi \\ &\leqslant \alpha\xi^{\mathrm{T}}L_1\xi + \frac{1}{\alpha}\xi^{\mathrm{T}}L_2\xi \end{aligned}$$

因此式(4.2.17)对式(4.2.13)也是充分的。

再由 Schur 引理，不等式(4.2.17)等价于

$$\begin{bmatrix} S_1 & PA_1 & PB_1K & (E_1+E_3K)^{\mathrm{T}} \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 & E_2^{\mathrm{T}} \\ K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\rho_h)R_2 & (E_4K)^{\mathrm{T}} \\ E_1+E_3K & E_2 & E_4K & -\alpha I \end{bmatrix}<0 \tag{4.2.18}$$

引入矩阵 $X=P^{-1}$, $Q_1=XR_1X$, $Q_2=XR_2X$ ，并记 $K=YX^{-1}$ ，其中 Y 为具有适当维数的任意矩阵， Q_1 和 Q_2 为具有适当维数的对称正定矩阵。在式(4.2.18)左右两边同乘以

$$\begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

则不等式(4.2.18)等价于

$$\begin{bmatrix} S_1 & A_1X & B_1Y & XE_1^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} \\ XA_1^{\mathrm{T}} & -(1-\rho_d)Q_1 & 0 & XE_2^{\mathrm{T}} \\ Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -(1-\rho_h)R_2 & Y^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}} \\ E_1X+E_3Y & E_2X & E_4Y & -\alpha I \end{bmatrix}<0 \tag{4.2.19}$$

其中

$$S_2=XA^{\mathrm{T}}+AX+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BY+Q_1+Q_2+\alpha HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon XX$$

再次应用 Schur 引理，并令 $\beta=\varepsilon^{-1}$ ，不等式(4.2.19)可等价为

$$\begin{bmatrix} S & A_1X & B_1Y & XE_1^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & X \\ XA_1^{\mathrm{T}} & -(1-\rho_d)Q_1 & 0 & XE_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -(1-\rho_d)Q_2 & Y^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}} & 0 \\ E_1X+E_3Y & E_2X & E_4Y & -\alpha I & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix}<0 \tag{4.2.20}$$

其中， $S=XA^{\mathrm{T}}+AX+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BY+Q_1+Q_2+\alpha HH^{\mathrm{T}}$ 。证毕。

例 4.2.1　考虑具有如下参数的不确定线性时滞系统(4.2.1):

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.2\end{bmatrix}$$

$$\Delta A=\Delta A_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ s & s\end{bmatrix}\sin(t),\quad \Delta B=\begin{bmatrix}0\\ s\end{bmatrix}\sin(t),\quad \Delta B_1=\begin{bmatrix}0\\ s\end{bmatrix}\sin(t)$$

其中，$s>0$，且有 $d(t)=0.3+0.3\sin(t)$，$h(t)=0.2+0.2\cos(t)$，$\phi(t)=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$t\in\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}$。

我们首先把上述不确定描述为范数有界型(4.2.3)

$$\Delta A=H_1F_1(t)E_1,\quad \Delta A_1=H_2F_2(t)E_2,\quad \Delta B=H_3F_3(t)E_3,\quad \Delta B_1=H_4F_4(t)E_4$$

其中

$$H_1=H_2=H_3=H_4=\begin{bmatrix}0\\ s\end{bmatrix},\quad E_1=E_2=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\quad E_3=E_4=1,\quad F_i(t)=\sin(t)$$

当 $s=0.7$ 时，求解线性矩阵不等式(4.2.11)，可得

$$X=\begin{bmatrix}0.4101 & -0.2259\\ -0.2259 & 0.5281\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-0.4313 & -0.3909\end{bmatrix}$$

线性状态反馈控制律为

$$u(t)=Kx(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-1.9088 & -1.5566\end{bmatrix}x(t)$$

4.3　具有范数有界不确定参数的线性时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定

4.2 节研究了具有范数有界不确定参数线性时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定问题，所得结果是时滞无关的，这导致了极大的保守性，特别是在已知时滞大小的时候。本节采用 Lypounov- Razumikhin 定理，进一步研究不确定线性时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定问题，降低所得结论的保守性。

考虑如下的不确定线性时滞系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=(A+\Delta A)x(t)+(A_1+\Delta A_1)x(t-d_1(t))\\ &\quad+(B+\Delta B)u(t)+(B_1+\Delta B_1)u(t-d_2(t))\\ x(t)&=\phi(t),\quad t\in[-\tau,\ 0]\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

其中，$x(t) \in R^n$ 为系统状态变量，$u(t) \in R^m$ 为系统的输入变量，A、A_1、B、B_1 为适当维数的定常矩阵，$d_i(t)$ $(i=1,2)$ 为系统状态滞后与输入滞后函数，满足

$$0 \leqslant d_i(t) \leqslant \tau_i < \tau, \quad i=1,2 \tag{4.3.2}$$

为了叙述的方便，记 $d_0(t)=0$。$\phi(t) \in [-\tau, 0] \mapsto R^n$ 为连续的向量函数，表述系统的初始条件。ΔA、ΔA_1、ΔB、ΔB_1 代表系统的不确定性，满足

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} = D_0 F_0(t) \begin{bmatrix} E_0 & E_b \end{bmatrix}, \quad \Delta A_1 = D_1 F_1(t) E_1, \quad \Delta B_1 = D_2 F_2(t) E_2 \tag{4.3.3}$$

其中，D_i、E_i $(i=0,1,2)$ 为适当维数的定常矩阵，$F_i(t)$ $(i=0,1,2)$ 为不确定矩阵函数，其元素是 Lebesgue 可测的，且满足不等式

$$F_i^{\mathrm{T}}(t) F_i(t) \leqslant I \tag{4.3.4}$$

对于不确定线性时滞系统(4.3.1)，我们有如下定义：

定义 4.3.1　不确定线性时滞系统(4.3.1)被称为是鲁棒可镇定的，如果存在一个无记忆状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$ 使得系统(4.3.1)闭环鲁棒稳定，即系统(4.3.1)的 $x(t) \equiv 0$ 平凡解对所有满足条件(4.3.3)与(4.3.4)的ΔA、ΔB、ΔA_1、ΔB_1 是大范围渐进稳定的。

引理 4.3.1　A、D、E、F 为适当维数的实矩阵，且有 $F^{\mathrm{T}} F \leqslant I$，那么对于任意的标量 $\varepsilon > 0$，有

$$DFE + E^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} \leqslant \varepsilon DDT + \varepsilon^{-1} E^{\mathrm{T}} E$$

引理 4.3.2　矩阵 A、D、E、F 为适当维数的实矩阵，且有 $F^{\mathrm{T}} F \leqslant I$，那么对任意的对称正定矩阵 P 及标量 $\varepsilon > 0$，如果有 $P - \varepsilon EPE^{\mathrm{T}} > 0$，那么

$$(A+DFE)P(A+DFE)^{\mathrm{T}} \leqslant APA^{\mathrm{T}} + APE^{\mathrm{T}}(\varepsilon I - EPE^{\mathrm{T}})^{-1} EPA^{\mathrm{T}} + \varepsilon DD^{\mathrm{T}}$$

引理 4.3.3　A、D、E、F 为适当维数的实矩阵，且有 $F^{\mathrm{T}} F \leqslant I$，那么对任意的对称正定矩阵 P 及标量 $\varepsilon > 0$，如果有 $P - \varepsilon DD^{\mathrm{T}} > 0$，那么

$$(A+DFE)^{\mathrm{T}} P^{-1} (A+DFE) \leqslant A^{\mathrm{T}} (P - \varepsilon DD^{\mathrm{T}})^{-1} A + \varepsilon^{-1} E^{\mathrm{T}} E$$

引理 4.3.4　假设 $x_i (i=1,2,\cdots,n)$ 为具有适当维数的向量，则对任意正整数 n，下述不等式成立：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mathrm{T}} x_i\right)$$

证明　采用数学归纳法易证本引理，显然该引理在 $n=1$ 时成立，假设在 $n=k-1$ 时成立，则当 $n=k$ 时有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^{\mathrm T}\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right) &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)^{\mathrm T}\left(\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)+2\left(\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)^{\mathrm T}x_k+x_k^{\mathrm T}x_k \\ &\leqslant (k-1)\left(\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)^{\mathrm T}\left(\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right)+\sum_{i=1}^{k-1}x_i^{\mathrm T}x_i+(k-1)x_k^{\mathrm T}x_k+x_k^{\mathrm T}x_k \\ &\leqslant n\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm T}x_i\right)\end{aligned}$$

证毕。

对于系统(4.3.1)的鲁棒可镇定问题，我们有如下定理：

定理 4.3.1　考虑不确定线性时滞系统(4.3.1)~(4.3.3)。给定标量 $\tau_i(i=1,2)$，如果存在对称正定矩阵 X, P_{ij}, Q，任意矩阵 Y 和标量 $\varepsilon_i>0,\ \alpha_j>0,\ \rho_{ij}>0$ $(i=1,2,\ j=0,1,2)$ 使得如下矩阵不等式成立：

$$YX^{-1}W_2X^{-1}Y^{\mathrm T}\leqslant Q \tag{4.3.5a}$$

和如下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} S & H_1 & H_2 \\ H_1^{\mathrm T} & -J_1 & 0 \\ H_2^{\mathrm T} & 0 & -J_2 \end{bmatrix}<0 \tag{4.3.5b}$$

$$\begin{bmatrix} X & XA^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}B^{\mathrm T} & XE_0^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}E_b^{\mathrm T} \\ AX+BY & P_{i0}-\rho_{i0}D_0D_0^{\mathrm T} & 0 \\ E_0X+E_bY & 0 & \rho_{i0}I \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{4.3.5c}$$

$$\begin{bmatrix} X & XA_1^{\mathrm T} & XE_1^{\mathrm T} \\ A_1X & P_{i1}-\rho_{i1}D_1D_1^{\mathrm T} & 0 \\ E_1X & 0 & \rho_{i1}I \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{4.3.5d}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y^{\mathrm T}B_1^{\mathrm T} & Y^{\mathrm T}E_2^{\mathrm T} \\ B_1Y & P_{i2}-\rho_{i2}D_2D_2^{\mathrm T} & 0 \\ E_2Y & 0 & \rho_{i2}I \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{4.3.5e}$$

其中

$$W_{ij}=\sum_{j=0}^{2}P_{ij},\quad i=1,2$$

$$S=AX+XA^{\mathrm{T}}+A_1X+XA_1^{\mathrm{T}}+BY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\sum_{i=0}^{2}\alpha_iD_iD_i^{\mathrm{T}}$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\tau_i\varepsilon_iD_iD_i^{\mathrm{T}}+\tau_1A_1W_1A_1^{\mathrm{T}}+\tau_2B_1QB_1^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}\tau_iX$$

$$H_1=\begin{bmatrix}XE_0^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}E_b^{\mathrm{T}} & XE_1^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$J_1=\mathrm{diag}\{\alpha_0I,\ \alpha_1I,\ \alpha_2I\}$$

$$H_2=\begin{bmatrix}\tau_1A_1W_1E_1^{\mathrm{T}} & \tau_2B_1QE_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$J_2=\mathrm{diag}\left\{\tau_1(\varepsilon_1I-E_1W_1E_1^{\mathrm{T}}),\ \tau_2(\varepsilon_2I-E_2QE_2^{\mathrm{T}})\right\}$$

则对于任意的$0\leqslant d_i(t)\leqslant\tau_i<\tau(i=1,2)$，系统是鲁棒可镇定的，并且反馈律

$$u(t)=YX^{-1}x(t)$$

为一鲁棒镇定控制律。

证明 针对不确定线性时滞系统(4.3.1)，引入反馈控制律$u(t)=Kx(t)$，则可得到如下的闭环系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=(A+BK+\Delta A(t)+\Delta B(t)K)x(t)\\&\quad+(A_1+\Delta A_1(t))x(t-d_1(t))+(B_1K+\Delta B_1K)x(t-d_2(t))\\x(t)&=\phi(t),\quad t\in[-\tau,0]\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

为了简便起见，引入如下记号：

$$A_0=A+BK\,,\qquad \Delta A_0=D_0F_0(t)(E_0+E_bK)$$

$$A_2=B_1K\,,\qquad \Delta A_2=D_2F_2(t)E_2K\,,\qquad \tilde{A}_i(t)=A_i+\Delta A_i(t)\,,\quad i=0,1,2$$

令$x(t),\ t\geqslant 0$为闭环系统(4.3.6)的解，由于其解是连续而且可微的，根据Leibniz-Newton公式，对于任意的$t\geqslant d_i(t)$，可得

$$x(t-d_i(t)) = x(t) - \int_{-d_i(t)}^{0} \dot{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$= x(t) - \int_{-d_i(t)}^{0} \left\{ \sum_{j=0}^{2} \tilde{A}_j(t+\theta)x(t-d_j(t)+\theta) \right\} \mathrm{d}\theta \tag{4.3.7}$$

因此，闭环系统(4.3.6)可以看成(4.3.8)的一个特例

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{2} \tilde{A}_i(t)x(t) - \sum_{i=1}^{2}\int_{-d_i(t)}^{0} \tilde{A}_i(t)\left\{ \sum_{j=0}^{2} \tilde{A}_j(t+\theta)x(t-d_j(t)+\theta) \right\}\mathrm{d}\theta \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-2\tau, 0] \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

因此，如果系统(4.3.8)是大范围渐进稳定的，则系统(4.3.1)~(4.3.3)引入控制律 $u(t)=Kx(t)$后的闭环系统亦是大范围渐进稳定的。

针对系统(4.3.8)，取其 Lyapunov 函数为

$$V(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \tag{4.3.9}$$

则该 Lyapunov 函数沿系统(4.3.8)的轨迹关于时间 t 的导数为

$$\dot{V}(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)\left[P\sum_{i=0}^{2}\tilde{A}_i(t) + \left(\sum_{i=0}^{2}\tilde{A}_i(t) \right)^{\mathrm{T}} P \right] x(t) + h(x(t),t) \tag{4.3.10}$$

其中

$$h(x(t),t) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}\int_{-d_i(t)}^{0} 2x^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{A}_i(t)\tilde{A}_j(t+\theta)x(t-d_i(t)+\theta)\mathrm{d}\theta$$

由引理 3.2.1 及其引理 4.3.1，有

$$\dot{V}(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)M_1x(t) + h(x(t),t) \tag{4.3.11}$$

其中

$$\begin{aligned} M_1 &= PA + A^{\mathrm{T}}P + PA_1 + A_1^{\mathrm{T}}P + PBK + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P + PB_1K + K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}P \\ &\quad + P\left(\sum_{i=0}^{2}\alpha_i D_i D_i^{\mathrm{T}} \right)P + \alpha_0^{-1}(E_0 + B_bK)^{\mathrm{T}}(E_0 + B_bK) + \alpha_1^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1 + \alpha_2^{-1}K^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}E_2K \end{aligned}$$

而且

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-d_i(t)}^{0} 2x^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{A}_i(t)\tilde{A}_j(t+\theta)x(t-d_i(t)+\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \tau_i x^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{A}_i(t)P_{ij}\tilde{A}_i^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \\
&\quad+\int_{-d_i(t)}^{0} x^{\mathrm{T}}(t-d_i(t)+\theta)\tilde{A}_j^{\mathrm{T}}(t+\theta)P_{ij}^{-1}\tilde{A}_j(t+\theta)x(t-d_i(t)+\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

为描述方便起见，记

$$
W_i=\sum_{j=0}^{2}P_{ij},\quad i=1,2 \tag{4.3.12}
$$

则由引理 4.3.2，对满足式(4.3.13)的任意的 $\varepsilon_i>0$

$$
\varepsilon_1 I-E_1W_1E_1^{\mathrm{T}}>0,\quad \varepsilon_2 I-E_2KW_2K^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}>0 \tag{4.3.13}
$$

进一步

$$
\sum_{i=1}^{2}\left[\tau_i\tilde{A}_i(t)W_i\tilde{A}_i^{\mathrm{T}}(t)\right]\leqslant M_2 \tag{4.3.14}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
M_2=&\tau_1\left[A_1W_1A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1D_1D_1^{\mathrm{T}}+A_1W_1E_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1I-E_1W_1E_1^{\mathrm{T}})^{-1}E_1W_1A_1^{\mathrm{T}}\right] \\
&+\tau_2\Big[B_1KW_2K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2D_2D_2^{\mathrm{T}} \\
&+B_1KW_2K^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}\left(\varepsilon_2I-E_2KW_2K^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1}E_2KW_2K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}\Big]
\end{aligned}
$$

由引理 4.3.5，如果存在标量 $\rho_{ij}>0$，使得如下的不等式满足：

$$
A_0^{\mathrm{T}}(P_{i0}-\rho_{i0}D_0D_0^{\mathrm{T}})^{-1}A_0+\rho_{i0}^{-1}(E_0+E_bK)^{\mathrm{T}}(E_0+E_bK)\leqslant P \tag{4.3.15}
$$

$$
A_1^{\mathrm{T}}(P_{i1}-\rho_{i1}D_1D_1^{\mathrm{T}})^{-1}A_1+\rho_{i1}^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1\leqslant P \tag{4.3.16}
$$

$$
K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}\left(P_{i2}-\rho_{i2}D_2D_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1}B_1K+\rho_{i2}^{-1}K^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}E_2K\leqslant P \tag{4.3.17}
$$

则不等式

$$
\tilde{A}_j(t+\theta)P_{ij}^{-1}\tilde{A}_j(t+\theta)\leqslant P,\quad \forall t\geqslant 0\quad (i=1,2,\ j=0,1,2) \tag{4.3.18}
$$

成立。

为应用 Razumikhin 定理，我们假设存在实常数 $q>1$ 使得下面的不等式成立：

$$\dot{V}(x(\xi),\xi)<qV(x(t),t),\quad t-2\tau\leqslant\xi\leqslant t \tag{4.3.19}$$

再由不等式(4.3.18)，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}\int_{-d_i(t)}^{0}x^{\mathrm{T}}(t-d_i(t)+\theta)\tilde{A}_j^{\mathrm{T}}(t+\theta)P_{ij}\tilde{A}_j(t+\theta)x(t-d_i(t)+\theta)\mathrm{d}\theta\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}\int_{-d_i(t)}^{0}x^{\mathrm{T}}(t-d_i(t)+\theta)Px(t-d_i(t)+\theta)\mathrm{d}\theta\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}\int_{-d_i(t)}^{0}qx^{\mathrm{T}}(t)Px(t)\mathrm{d}\theta\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{2}\tau_i\sum_{j=0}^{2}qx^{\mathrm{T}}(t)Px(t)
\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

结合式(4.3.11), (4.3.14), (4.3.20)，我们有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t),t)&\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)\left(M_1+PM_2P+\sum_{i=1}^{2}\tau_i\sum_{j=0}^{2}qP\right)x(t)\\
&=x^{\mathrm{T}}(t)M_3x(t)
\end{aligned}\tag{4.3.21}$$

令 $X=P^{-1}$，$K=YX^{-1}$，并假设存在对称正定矩阵 $Q>0$

$$YX^{-1}W_2X^{-1}Y^{\mathrm{T}}\leqslant Q \tag{4.3.22}$$

记

$$\begin{aligned}
M_2=XM_3X\leqslant{}&AX+XA^{\mathrm{T}}+A_1X+XA_1^{\mathrm{T}}+BY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+B_1Y+Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}\\
&+\sum_{i=0}^{2}\alpha_iD_iD_i^{\mathrm{T}}+\alpha_0^{-1}(E_0X+E_bY)^{\mathrm{T}}(E_0X+E_bY)+\alpha_1^{-1}XE_1^{\mathrm{T}}E_1X\\
&+\alpha_2^{-1}Y^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}E_2Y+\tau_1A_1W_1A_1^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}\tau_i\varepsilon_iD_iD_i^{\mathrm{T}}+\tau_2B_1QB_1^{\mathrm{T}}\\
&+\tau_1A_1W_1E_1^{\mathrm{T}}\left(\varepsilon_1I-E_1W_1E_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1}E_1W_1A_1^{\mathrm{T}}\\
&+\tau_2B_1QE_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I-E_2QE_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2QB_1^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}\tau_iqX
\end{aligned}$$

令 $M = M_4$, $q = 1$，显然 $x^{\mathrm{T}}(t)M_4x(t)$ 的值是随 τ_i 和 q 的增加而单调增加，因此如果对某些 τ_i 存在对称正定矩阵 X, P_{ij}, Q 和标量 $\beta > 0,\ \varepsilon_i > 0,\ \alpha_j > 0,\ \rho_{ij} > 0,$ $(i = 1,2,\ j = 0,1,2)$ 满足不等式(4.3.13), (4.3.15)~(4.3.18)，(4.3.22)，以及 $M > 0$，那么必然存在一充分小的 $q > 1$ 对任意的 $0 \leqslant d_i(t) \leqslant \tau_i$ 有 $M_4 < 0$。

由 Schur 补引理，$M < 0$ 及不等式(4.3.13), (4.3.15)~(4.3.18)等价于线性矩阵不等式(4.3.5b)~(4.3.5e)。因此对给定的标量 τ_i 和 τ 满足 $0 < \tau_i \leqslant \tau(i = 1,2)$，如果存在对称正定矩阵 X, P_{ij}, Q 和标量 $\beta > 0,\ \varepsilon_i > 0,\ \alpha_j > 0,\ \rho_{ij} > 0(i = 1,2, j = 0,1,2)$ 满足线性矩阵不等式(4.3.5b)~(4.3.5e)以及不等式(4.3.22)，那么对于任意的 $0 \leqslant d_i(t) \leqslant \tau_i \leqslant \tau,\ t > 0(i = 1,2)$，闭环系统有

$$\dot{V}(x(t),t) \leqslant -\lambda_{\max}(M_3)\|x(t)\|^2 \tag{4.3.23}$$

由 Razmikhin 定理，不确定线性时滞系统(4.3.1)在控制律 $u(t) = Kx(t)$ 作用下是鲁棒渐进稳定的。证毕。

由于不等式约束(4.3.5a)是一个非线性矩阵不等式，不能跟线性矩阵不等式一起联立求解。下面我们给出几种不同的处理方法。

方法 4.3.1　假设存在对称正定矩阵 Q_1 使得

$$X \geqslant Q_1 \tag{4.3.24}$$

$$W_2 \leqslant Q_1 \tag{4.3.25}$$

则显然有

$$YX^{-1}W_2X^{-1}Y^{\mathrm{T}} \leqslant YQ_1^{-1}Y^{\mathrm{T}} \tag{4.3.26}$$

因此如果存在对称正定矩阵 Q_1 使得(4.3.24)，(4.3.25)以及下面的(4.3.27)满足，则约束(4.3.5a)满足。

$$YQ_1^{-1}Y^{\mathrm{T}} \leqslant Q \tag{4.3.27}$$

显然，不等式(4.3.27)又等价于

$$\begin{bmatrix} Q & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Q_1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.3.28}$$

式(4.3.24)，(4.3.25)和(4.3.28)都是线性矩阵不等式，可以同式(4.3.5b)~(4.3.5e)一起联立求解。

方法 4.3.1 虽然简单易行，但上面的处理方法实际上是假设 $W_2 \leqslant X$，该假设

的引入带来很大的保守性。因此我们给出下面的解决办法。

对任意的对称正定矩阵 Q，总存在标量 $\beta>0$ 使得

$$Q\leqslant \beta I \tag{4.3.29}$$

我们可以采用如下的办法对 β 进行一维搜索，使得线性矩阵不等式(4.3.5b)~(4.3.5e), (4.3.29)的解同时满足不等式(4.3.5a)。

方法 4.3.2　(1) 给定 ε 为一个足够小的数，确定 β 的两个初值，一般可取 $\beta_0=0$，β_1 为一个足够大的数，使得线性矩阵不等式(4.3.5b)~(4.3.5e)无解。

(2)令 $\beta=(\beta_1+\beta_2)/2$，求解线性矩阵不等式(4.3.5b)~(4.3.5e), (4.3.29)，如果无解，且 $\beta_2-\beta_1\geqslant\varepsilon$，则令 $\beta_2=\beta$ 转到(2)，如 $\beta_2-\beta_1<\varepsilon$ 则算法失效，需重新选取初值。有解则验证不等式(4.3.5a)，满足则找到一组解，不满足且 $\beta_2-\beta_1<\varepsilon$，则算法失效，否则令 $\beta_1=\beta$，转到(2)。

由于给定一个 β，一般满足线性矩阵不等式(4.3.5b)~(4.3.5e), (4.3.29)的 X、Y、P_{ij}、Q 是一个集合，只有在求解线性矩阵不等式(4.3.5b)~(4.3.5e), (4.3.29)的同时作如下优化问题：

$$\text{最小化}\,\sigma$$

$$\text{约束：(4.3.5b)~(4.3.5e), (4.3.29)及}\ YX^{-1}W_2X^{-1}Y^{\mathrm{T}}\leqslant\sigma I$$

时方法 4.3.2 才不会带来任何保守性，但现有的 LMI 求解软件包都不能作上述的优化问题，因此方法 4.3.2 也有一定的保守性。

显然不等式(4.3.5a)可以等价为下面的两个不等式：

$$\alpha^{-1}YY^{\mathrm{T}}\leqslant Q \tag{4.3.30}$$

$$X^{-1}W_2X^{-1}\leqslant\alpha^{-1}I \tag{4.3.31}$$

由 Schur 引理，不等式(4.3.30)等价于如下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} Q & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & \alpha I \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{4.3.32}$$

如果有 $X^{-1}W_2<\gamma I,\ X^{-1}<\gamma I$，则显然 $X^{-1}W_2X^{-1}<\gamma^2 I$，只要 $\gamma^2\leqslant\alpha^{-1}$，不等式约束(4.3.5a)就能满足。通过如下的广义特征值最小化问题：

问题 4.3.1

$$\text{最小化}\,\gamma$$

$$约束：(4.3.5b)\sim(4.3.5e), (4.3.32)及 W_2 < \gamma X,\ I < \gamma X$$

在联立求解线性矩阵不等式(4.3.5b)~(4.3.5e)以及(4.3.32)的同时，可以最小化γ，从而可以在(4.3.5b)~(4.3.5e), (4.3.32)的可行解集合中选取 $X^{-1}W_2X^{-1}$ 比较小的一组解。基于以上分析，可以给出如下的改进算法。

方法 4.3.3　(1) 给定ε为一个足够小的数；给定γ的两个初值，一般可取$\alpha_1 = 0$，α_2为一足够大的数，使得问题 4.3.1 有解。如果(4.3.31)满足，则得到一组可行解，假设(4.3.31)不满足。

(2) 令$\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$，求解问题 5.3.1，如果无解且$\alpha_2 - \alpha_1 \geqslant \varepsilon$，则令$\alpha_1 = \alpha$转到(2)，$\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$则算法失效；有解则验证不等式(4.3.1)，满足则找到一组可行解，不满足而且$\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$则算法失效，否则$\alpha_2 = \alpha$，转到(2)。

上述问题可以由 LMI 求解软件包进行系统求解。

基于以上方法，当系统某一时滞上界已知时可以通过对另一τ_i的一维搜索，得到另一时滞τ_i的上界，使得对所有$0 \leqslant d_i(t) \leqslant \tau_i,\ t \geqslant 0$系统鲁棒可镇定。或者通过对共同的时滞上界$\tau$的一维搜索，可以找到一个最大$\tau^*$使得对任意的$0 \leqslant d_i(t) \leqslant \tau_i \leqslant \tau,\ t \geqslant 0$系统都是鲁棒可镇定的。

例 4.3.1　考虑具有如下参数的不确定线性时滞系统：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix},\quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}\sin(t),\quad \Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}\sin(t),\quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(t),\quad \Delta B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}\sin(t)$$

其中$s > 0$，且有

$$d(t) = |0.2\sin(t)|,\quad h(t) = |0.3\cos(t)|,\ \phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ t \in \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

我们把上述参数不确定表示为范数有界型

$$\Delta A = D_0F_0(t)E_0,\quad \Delta A_1 = D_1F_1(t)E_1,\quad \Delta B = D_0F_1(t)E_b,\quad \Delta B_1 = D_2F_2(t)E_2$$

其中

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},\quad E_b = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix},\quad E_4 = 0.1$$

如果采用方法 4.3.1，则得不到可行解，而用方法 4.3.2，在$\alpha = 0.003$时可得到一组可行解

$$X = \begin{bmatrix} 0.2248 & -0.0895 \\ -0.0895 & 0.2496 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -0.09164 & -0.0137 \end{bmatrix}$$

线性状态反馈控制律为

$$u(t) = Kx(t) = YX^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} -0.4500 & -0.1066 \end{bmatrix} x(t)$$

4.4　具有凸多面体不确定参数线性时滞系统的鲁棒二次镇定

考虑如下的不确定线性时滞系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_1 + \Delta A_1)x(t - d(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B)u(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t - h(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in \left[-\max(d(t), h(t)),\ 0\right] \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

其中，$x(t) \in R^n$ 是状态向量，$u(t) \in R^m$ 是控制输入向量，$A \in R^{n\times n}$，$A_1 \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times m}$ 和 $B_1 \in R^{n\times m}$ 是已知的实常数矩阵。ΔA, ΔA_1, ΔB 和 ΔB_1 是具有适当维数的实函数矩阵，表示系统的不确定参数。$d(t)$ 和 $h(t)$ 分别表示系统的状态滞后和控制滞后，且存在正实数 d^*、h^*、ρ_d 和 ρ_h 使得对所有的 t，满足

$$\begin{aligned} 0 \leqslant d(t) \leqslant d^* < \infty, \quad \dot{d}(t) \leqslant \rho_d < 1 \\ 0 \leqslant h(t) \leqslant h^* < \infty, \quad \dot{h}(t) \leqslant \rho_h < 1 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

并假设 $d(t) \neq h(t), \quad t \in \left[0, \max(d(t), h(t))\right]$。$\phi(t)$ 是定义在 Banach 空间 $C^n[-\tau, 0]\left(\tau = \max d((t), h(t))\right)$ 上的光滑函数

$$\psi : [-\tau, 0] \mapsto R^n, \quad \|\psi\|_\infty := \sup_{-\tau \leqslant \zeta \leqslant 0} \|\psi(\zeta)\| \tag{4.4.3}$$

表示系统的初始条件。

我们假设系统的不确定参数具有如下的形式:

$$\begin{aligned}
&\Delta A=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i E_i \mid \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,\alpha_i\geqslant 0\right\},\quad \Delta A_1=\left\{\sum_{j=1}^{l}\beta_j F_j \mid \sum_{j=1}^{l}\beta_j=1,\beta_j\geqslant 0\right\}\\
&\Delta B=\left\{\sum_{r=1}^{p}\gamma_r G_r \mid \sum_{r=1}^{p}\gamma_r=1,\gamma_r\geqslant 0\right\},\quad \Delta B_1=\left\{\sum_{s=1}^{q}\eta_s H_s \mid \sum_{s=1}^{q}\eta_s=1,\eta_s\geqslant 0\right\}
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

其中，$E_i\in R^{n\times n}(i=1,\cdots,k)$，$F_j\in R^{n\times n}(j=1,\cdots,l)$，$G_r\in R^{n\times m}(r=1,\cdots,p)$，$H_s\in R^{n\times m}(s=1,\cdots,q)$ 是已知的实矩阵，$\alpha_i(i=1,\cdots,k)$，$\beta_j(j=1,\cdots,l)$，$\gamma_r(r=1,\cdots,p)$ 和 $\eta_s(s=1,\cdots,q)$ 是未知的有界标量。

显然，不确定参数 ΔA, ΔA_1, ΔB 和 ΔB_1 是有界的，从几何上看它们分别是以 $E_i(i=1,\cdots,k)$，$F_j(j=1,\cdots,l)$，$G_r(r=1,\cdots,p)$ 和 $H_s(s=1,\cdots,q)$ 为顶点的凸多面体。同时，不确定参数 ΔA, ΔA_1, ΔB 和 ΔB_1 可以是时变的，它们也能显式地写成依赖时间 t 的形式，例如，ΔA 能写成

$$\Delta A(t)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)E_i \mid \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)=1,\ \alpha_i(t)\geqslant 0\right\}$$

记

$$\bar{A}=A+\Delta A,\quad \bar{A}_1=A_1+\Delta A_1,\quad \bar{B}=B+\Delta B,\quad \bar{B}_1=B_1+\Delta B_1$$

针对以上系统，我们研究由定义 4.2.1 给出的鲁棒二次镇定问题。

首先我们给出如下引理：

引理 4.4.1 给定任意对称正定矩阵 Q，映射 $\Delta\mapsto\Delta^{\mathrm{T}}Q\Delta$ 是凸的。

证明 展开 $(\Delta_1-\Delta_2)^{\mathrm{T}}Q(\Delta_1-\Delta_2)\geqslant 0$ 可得

$$\Delta_1^{\mathrm{T}}Q\Delta_2+\Delta_2^{\mathrm{T}}Q\Delta_1\leqslant\Delta_1^{\mathrm{T}}Q\Delta_1+\Delta_2^{\mathrm{T}}Q\Delta_2$$

因此，对任意满足 $\alpha_1+\alpha_2=1$ 的 $\alpha_1,\alpha_2\geqslant 0$ 及任意 Δ_1, Δ_2，有

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2)^{\mathrm{T}}Q(\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2)\\
&=\alpha_1^2\Delta_1^{\mathrm{T}}Q\Delta_1+\alpha_2^2\Delta_2^{\mathrm{T}}Q\Delta_2+\alpha_1\alpha_2\left(\Delta_1^{\mathrm{T}}Q\Delta_2+\Delta_2^{\mathrm{T}}Q\Delta_1\right)\\
&\leqslant\alpha_1^2\Delta_1^{\mathrm{T}}Q\Delta_1+\alpha_2^2\Delta_2^{\mathrm{T}}Q\Delta_2+\alpha_1\alpha_2\left(\Delta_1^{\mathrm{T}}Q\Delta_1+\Delta_2^{\mathrm{T}}Q\Delta_2\right)\\
&=\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\Delta_1^{\mathrm{T}}Q\Delta_1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta_2^{\mathrm{T}}Q\Delta_2\\
&=\alpha_1\Delta_1^{\mathrm{T}}Q\Delta_1+\alpha_2\Delta_2^{\mathrm{T}}Q\Delta_2
\end{aligned}$$

对于系统(4.4.1)的可镇定问题，我们有如下的定理。

定理 4.4.1　不确定线性时滞系统(4.4.1)是线性状态反馈鲁棒二次可镇定的，当且仅当存在对称正定矩阵 X, $Q_i \in R^{n\times n}(i=1,2)$，矩阵 $Y \in R^{m\times n}$ 以及标量 $\alpha > 0$，使得下面的线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} S & X & X & (B_1+H_s)Y \\ X & -\alpha I & 0 & 0 \\ X & 0 & -Q_1 & 0 \\ Y^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -(1-\rho_h)Q_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.4.5}$$

其中，$(i, j, r, s) \in \{1,\cdots,k\}\times\{1,\cdots,l\}\times\{1,\cdots,p\}\times\{1,\cdots,q\}$ 且

$$\begin{aligned} S = {} & X(A+E_i)^{\mathrm{T}} + (A+E_i)X + (B+G_r)Y + Y^{\mathrm{T}}(B+G_r)^{\mathrm{T}} \\ & + Q_2 + \frac{1}{1-\rho_d}(A+F_j)Q_1(A+F_j)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

而且，一个合适的鲁棒二次镇定控制律由下式给出：

$$u(t) = YX^{-1}x(t)$$

证明　由引理 4.2.1，系统(4.4.1)~(4.4.3)是鲁棒二次可镇定的，等价于

$$W = \begin{bmatrix} \overline{A}^{\mathrm{T}}P + P\overline{A} + K^{\mathrm{T}}\overline{B}^{\mathrm{T}}P + P\overline{B}K + R_1 + R_2 + \varepsilon I & P\overline{A}_1 & P\overline{B}_1K \\ \overline{A}_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 \\ K^{\mathrm{T}}\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\rho_h)R_2 \end{bmatrix} \tag{4.4.6}$$

$$< 0$$

由 Schur 引理不等式(4.4.6)可进一步等价为

$$W_1 < 0 \tag{4.4.7}$$

其中

$$\begin{aligned} W = {} & \overline{A}^{\mathrm{T}}P + P\overline{A} + K^{\mathrm{T}}\overline{B}^{\mathrm{T}}P + P\overline{B}K + R_1 + R_2 + \varepsilon I \\ & + P\overline{A}_1\left((1-\rho_d)R_1\right)^{-1}\overline{A}_1^{\mathrm{T}}P + P\overline{B}_1K\left((1-\rho_h)R_2\right)^{-1}K^{\mathrm{T}}\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P \end{aligned}$$

引入 $X = P^{-1}$，$Q_1 = R_1^{-1}$，$\alpha = \varepsilon^{-1}$，并记 $Q_2 = XR_2X$，$K = YX^{-1}$，其中 Y 为具有适当维数的任意矩阵，Q_2 为具有适当维数的对称正定矩阵。显然，条件：存在矩阵 $K \in R^{m\times n}$，对称正定矩阵 P, R_1, $R_2 \in R^{n\times n}$ 以及标量 $\varepsilon > 0$ 使得不等式(4.4.7)满足等

价条件：存在对称正定矩阵 X, $Q_i \in R^{n\times n}(i=1,2)$，矩阵 $Y \in R^{m\times n}$ 以及正标量 $\alpha > 0$，使得下式满足：

$$W_2 < 0 \tag{4.4.8}$$

其中

$$\begin{aligned} W_2 = {} & X\bar{A}^{\mathrm{T}} + \bar{A}X + Y^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}} + \bar{B}Y + Q_2 + X\left(Q_1^{-1} + \alpha^{-1}I\right)X \\ & + (1-\rho_d)^{-1}\bar{A}_1 Q_1 \bar{A}_1^{\mathrm{T}} + (1-\rho_h)^{-1}\bar{B}_1 Y Q_2^{-1} Y \bar{B}_1^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

下面我们将证明，不等式(4.4.8)等价于

$$\begin{aligned} & X(A+E_i)^{\mathrm{T}} + (A+E_i)X + Y^{\mathrm{T}}(B+G_r)^{\mathrm{T}} + (B+G_r)Y + Q_2 + X\left(Q_1^{-1} + \alpha^{-1}I\right)X \\ & + (1-\rho_d)^{-1}(A_1+F_j)Q_1(A_1+F_j)^{\mathrm{T}} + (1-\rho_h)^{-1}(B_1+H_s)YQ_2^{-1}Y^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}} < 0 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

其中

$$(i,\ j,\ r,\ s) \in \{1,\cdots,k\} \times \{1,\cdots,l\} \times \{1,\cdots,p\} \times \{1,\cdots,q\}$$

必要性 当系统的不确定参数 ΔA, ΔA_1, ΔB 和 ΔB_1 取值为 E_i, $i \in \{1,\cdots,k\}$；F_j, $j \in \{1,\cdots,l\}$；G_r, $r \in \{1,\cdots,p\}$ 和 H_s, $s \in \{1,\cdots,q\}$ 的任意组合时，不等式(4.4.8)必须满足，即不等式(4.4.9)必须满足。

充分性 由引理 4.4.1，

$$(1-\rho_d)^{-1}\bar{A}_1 Q_1 \bar{A}_1^{\mathrm{T}} \leqslant \sum_{j=1}^{t} \beta_j (1-\rho_d)^{-1}(A_1+F_j)Q_1(A_1+F_j)^{\mathrm{T}} \tag{4.4.10}$$

$$(1-\rho_d)^{-1}\bar{B}_1 Y Q_2^{-1} Y \bar{B}_1^{\mathrm{T}} \leqslant \sum_{s=1}^{q} \eta_s (1-\rho_h)^{-1}(B_1+H_s)Q_2^{-1}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}} \tag{4.4.11}$$

考虑一个新的凸集

$$\tilde{\Delta} = \left\{ \sum_{ijrs\in S} \delta_{ijrs} \begin{bmatrix} X(A+E_i)^{\mathrm{T}} + (A+E_i)X + Y^{\mathrm{T}}(B+G_r)^{\mathrm{T}} \\ +(B+G_r)Y + (1-\rho_d)^{-1}(A_1+F_j)Q_1(A_1+F_j)^{\mathrm{T}} \\ +(1-\rho_h)^{-1}(B_1+H_s)YQ_2^{-1}Y^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \delta_{ijrs} > 0, \sum_{ijrs\in S} \delta_{ijrs} = 1 \right\}$$

其中，$S=\{1,\cdots,k\}\times\{1,\cdots,l\}\times\{1,\cdots,p\}\times\{1,\cdots,q\}$，显然系统的参数集合

$$X\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{A}X+Y^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}+\bar{B}Y+\sum_{r=1}^{p}(1-\rho_d)^{-1}(A_1+F_j)Q_1(A_1+F_j)^{\mathrm{T}}$$

$$+\sum_{s=1}^{q}(1-\rho_h)^{-1}(B+H_s)YQ_2^{-1}Y^{\mathrm{T}}(B+H_s)^{\mathrm{T}}$$

跟 $\tilde{\Delta}$ 是等价的，再由(4.4.10)，(4.4.11)

$$W_2\leqslant\tilde{\Delta}+Q_2+XQ_1^{-1}X+\beta^{-1}XX \tag{4.4.12}$$

显然，满足不等式

$$\tilde{\Delta}+XQ_1^{-1}X+\rho^{-1}XX<0 \tag{4.4.13}$$

的集合 $\tilde{\Delta}$ 是一个凸集(即给定 Δ_1、Δ_2 满足式(4.4.13)，那么对任意 Δ_1、Δ_2 的凸组合 $\bar{\Delta}=\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2$，$\alpha_1+\alpha_2=1$，$\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$ 也满足(4.4.13))。这意味着只要 $\tilde{\Delta}$ 在各顶点的值满足不等式(4.4.13)，那么 $\tilde{\Delta}$ 的任意点均满足不等式(4.4.13)，也即式(4.4.13)对式(4.4.9)也是充分的。最后再由 Schur 引理，可知矩阵不等式(4.4.9)的等价于线性矩阵不等式(4.4.5)。证毕。

注 4.4.1　如果不存在时滞，线性矩阵不等式(4.4.5)变为

$$\begin{bmatrix} X(A+E_i)^{\mathrm{T}}+(A+E_i)X+Y^{\mathrm{T}}(B+G_r)^{\mathrm{T}}+(B+G_r)Y & X \\ X & -\alpha I \end{bmatrix}\leqslant 0 \tag{4.4.14}$$

这是一类存在凸多面体不确定参数线性系统的线性状态反馈鲁棒二次可镇定之充分必要条件。

例 4.4.1　把例 4.2.1 的不确定表示为凸多面体型

$$E_1=F_1=\begin{bmatrix}0&0\\-s&-s\end{bmatrix},\quad E_2=F_2=\begin{bmatrix}0&0\\s&s\end{bmatrix}$$

$$G_1=\begin{bmatrix}0\\-s\end{bmatrix},\quad G_1=\begin{bmatrix}0\\s\end{bmatrix},\quad H_1=\begin{bmatrix}0\\s\end{bmatrix},\quad H_2=\begin{bmatrix}0\\s\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1(t)=\beta_1(t)=\gamma_1(t)=\eta_1(t)=\frac{1-\sin(t)}{2},\quad \alpha_2(t)=\beta_2(t)=\gamma_2(t)=\eta_2(t)=\frac{1+\sin(t)}{2}$$

当 s=0.6 时，通过 Matlab/ LMI toolbox，可解得线性矩阵不等式(3.3.4),

$$X = \begin{bmatrix} 1.3037 & -0.7475 \\ -0.7475 & 1.8964 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1.6814 & -1.8117 \end{bmatrix}$$

线性状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) = YX^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} -2.3680 & -1.8860 \end{bmatrix} x(t)$$

4.5 具有凸多面体不确定参数的线性时滞系统的时滞依赖镇定

本节考虑如下不确定线性时滞系统：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_1 + \Delta A_1)x(t - d_1(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B)u(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t - d_2(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in \left[-\max(d(t), h(t)),\ 0\right] \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

并假设系统的不确定参数具有如下的形式：

$$\begin{aligned} \Delta A &= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i E_i \mid \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0 \right\}, \quad \Delta A_1 = \left\{ \sum_{j=1}^{l} \beta_j F_j \mid \sum_{j=1}^{l} \beta_j = 1,\ \beta_j \geqslant 0 \right\} \\ \Delta B &= \left\{ \sum_{r=1}^{p} \gamma_r G_r \mid \sum_{r=1}^{p} \gamma_r = 1,\ \gamma_r \geqslant 0 \right\}, \quad \Delta B_1 = \left\{ \sum_{s=1}^{q} \eta_s H_s \mid \sum_{s=1}^{q} \eta_s = 1,\ \eta_s \geqslant 0 \right\} \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

其中，$E_i \in R^{n\times n}(i=1,\cdots,k)$，$F_j \in R^{n\times n}(j=1,\cdots,l)$，$G_r \in R^{n\times m}(r=1,\cdots,p)$，$H_s \in R^{n\times m}$ $(s=1,\cdots,q)$ 是已知的实矩阵，$\alpha_i(i=1,\cdots,k)$，$\beta_j(j=1,\cdots,l)$，$\gamma_r(r=1,\cdots,p)$ 和 $\eta_s(s=1,\cdots,q)$ 是未知的有界标量。时滞 $d_1(t)$, $d_2(t)$ 满足式(4.3.2)和式(4.4.3)。

针对以上系统，我们同样将研究由定义 4.2.1 给出的鲁棒可镇定问题。

定理 4.5.1 考虑不确定线性时滞系统(4.5.1), (4.5.2)。给定标量 $\tau_u \geqslant 0(u=1,2)$，如果存在对称正定矩阵 X、$P_{uv}(u=1,2,\ v=0,1,2)$，任意的矩阵 Y 和标量 $\alpha > 0$ 满足矩阵不等式 $X^{-1}W_2X^{-1} \leqslant \alpha I$ 和如下的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} S & (B_1 + H_S)Y \\ Y^{\mathrm{T}}(B_1 + H_S)^{\mathrm{T}} & (-1/\tau)\alpha \end{bmatrix} < 0 \tag{4.5.3}$$

其中

$$
\begin{aligned}
S &= (A+E_i)X + X(A+E_i)^{\mathrm{T}} + (A_1+F_j)X + X(A_1+F_j)^{\mathrm{T}} \\
&\quad + (B+G_r)Y + Y^{\mathrm{T}}(B+G_r)^{\mathrm{T}} + (B_1+H_s)Y + Y^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}} \\
&\quad + \tau_1\ (A_1+F)W_2(A_1+F)^{\mathrm{T}} + \sum_{u=1}^{2}\sum_{v=0}^{2}\tau_u X
\end{aligned}
$$

且

$$
(i,j,r,s) \in \{1,\cdots,k\}\times\{1,\cdots,l\}\times\{1,\cdots,p\}\times\{1,\cdots,q\}
$$

$$
\begin{bmatrix} X & X(A+E_i)^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}(B+G_r)^{\mathrm{T}} \\ (A+E_i)X + (B+G_r)Y & P_{u0} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.5.4}
$$

其中

$$
(i,r) \in \{1,\cdots,k\}\times\{1,\cdots,p\}
$$

$$
\begin{bmatrix} X & X^{\mathrm{T}}(A_1+F_j)^{\mathrm{T}} \\ (A_1+F_j)X & P_{u1} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.5.5}
$$

其中

$$
j \in \{1,\cdots,l\}
$$

$$
\begin{bmatrix} X & Y^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}} \\ (B_1+H_s)Y & P_{u2} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.5.6}
$$

其中，$s \in \{1,\cdots,q\}$，$W_u = \sum_{v=0}^{2} P_{uv}(u=1,2)$，那么任意的 $0 \leqslant d_u(t) \leqslant \tau_u$，系统(4.5.1)和(4.5.2)是鲁棒可镇定的，而且反馈控制律

$$
u(t) = YX^{-1}x(t) \tag{4.5.7}
$$

为一鲁棒镇定控制律。

证明　针对不确定线性时滞系统(4.5.1)，引入反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$，则可得到闭环系统为

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A + BK + \Delta A(t) + \Delta BK)x(t) \\
&\quad + (A_1 + \Delta A_1(t))x(t-d_1(t)) + (B_1K + \Delta B_1(t)K)x(t-d_2(t)) \\
x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]
\end{aligned} \tag{4.5.8}
$$

为了叙述简便起见，引入如下的记号：

$$A_0 = A + BK, \quad \Delta A_0(t) = \Delta A + \Delta BK, \quad A_2 = B_1K, \quad \Delta A_2(t) = \Delta B_1 K$$

$$\tilde{A}_i = A_i + \Delta A_i(t), \quad i = 0,1,2$$

显然，如果系统(4.5.9)是大范围渐进稳定的，则系统(4.5.1)引入控制律 $u(t) = Kx(t)$ 后的闭环系统亦是大范围渐进稳定的。

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \sum_{u=0}^{2} \tilde{A}_u(t)x(t) - \sum_{u=1}^{2}\int_{-d_u(t)}^{0} \tilde{A}_u(t)\left\{\sum_{u=0}^{2}\tilde{A}_u(t+\theta)x(t-d_u(t)+\theta)\right\}\mathrm{d}\theta \\ &x(t) = \phi(t), \quad t \in [-2\tau, \ 0] \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

针对系统(4.5.9), 取其 Lyapunov 函数为

$$V(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \tag{4.5.10}$$

则该 Lyapunov 函数沿系统(4.5.9)的轨迹关于时间 t 的导数为

$$\dot{V}(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)\left[P\sum_{v=0}^{2}\tilde{A}_v(t) + \left(\sum_{v=0}^{2}\tilde{A}_v(t)\right)^{\mathrm{T}} P\right]x(t) + h(x(t),t) \tag{4.5.11}$$

其中

$$h(x(t),t) = -\sum_{u=1}^{2}\sum_{v=0}^{2}\int_{-d_u(t)}^{0} 2x^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{A}_u(t)\tilde{A}_v(t+\theta)x(t-d_u(t)+\theta)\mathrm{d}\theta$$

由引理 4.2.1，可得

$$\begin{aligned} &-\int_{-d_u(t)}^{0} 2x^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{A}_u(t)\tilde{A}_v(t+\theta)x(t-d_u(t)+\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \tau_u x^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{A}_u(t)P_{uv}\tilde{A}_u^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \\ &\quad + \int_{-d_u(t)}^{0} x^{\mathrm{T}}(t-d_u(t)+\theta)\tilde{A}_v^{\mathrm{T}}(t+\theta)P_{uv}^{-1}\tilde{A}_v(t+\theta)x(t-d_u(t)+\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

由引理 4.4.1，可得

$$\tilde{A}_1(t)P_{1v}\tilde{A}_{1v}^{\mathrm{T}}(t) = \left(A_1 + \sum_{j=1}^{l}\beta_j F_j\right)P_{1v}\left(A_1 + \sum_{j=1}^{l}\beta_j F_j\right)^{\mathrm{T}}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[\sum_{j=1}^{l}\beta_j(A_1+F_j)\right]P_{1v}\left[\sum_{j=1}^{l}\beta_j(A_1+F_j)\right]^{\mathrm{T}} \\
&\leqslant\sum_{j=1}^{l}\beta_j\left[(A_1+F_j)P_{1v}(A_1+F_j)^{\mathrm{T}}\right]
\end{aligned} \tag{4.5.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_2(t)P_{2v}\tilde{A}_{2v}^{\mathrm{T}}(t)&=\left[\sum_{s=1}^{q}\eta_s(B_1+H_s)\right]KP_{2v}K^{\mathrm{T}}\left[\sum_{s=1}^{q}\eta_s(B_1+H_s)\right]^{\mathrm{T}} \\
&\leqslant\sum_{s=1}^{q}\eta_s\left[(B_1+H_s)KP_{2v}K^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}}\right]
\end{aligned}
$$

令

$$
W_u=\sum_{v=0}^{2}P_{uv},\quad u=1,2
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{u=1}^{2}\sum_{v=0}^{2}\tau_u x^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{A}_u(t)P_{uv}\tilde{A}_u^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \\
&\leqslant\sum_{j=1}^{l}\beta_j\left[(A_1+F_j)W_1(A_1+F_j)^{\mathrm{T}}\right] \\
&\quad+\sum_{j=1}^{l}\eta_s\left[(B_1+H_s)KW_2K^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}}\right]
\end{aligned} \tag{4.5.14}
$$

同样由引理 4.4.1，如果下列不等式满足：

$$
\sum_{i,r\in S}\delta_{ir}\left[(A+E_i+BK+G_rK)^{\mathrm{T}}P_{u1}^{-1}(A+E_i+BK+G_rK)\right]\leqslant P \tag{4.5.15}
$$

$$
\sum_{j=1}^{l}\beta_j\left[(A_1+F_j)^{\mathrm{T}}P_{u1}^{-1}(A_1+F_j)\right]\leqslant P \tag{4.5.16}
$$

$$
\sum_{s=1}^{q}\eta_s\left[K^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}}P_{u2}^{-1}(B_1+H_s)K\right]\leqslant P \tag{4.5.17}
$$

其中，$S=\{1,\cdots,k\}\times\{1,\cdots,p\}$，$\sum_{i,r\in S}\delta_{ir}=1,\ \delta_{ir}\geqslant 0$，则不等式

$$
\tilde{A}_v^{\mathrm{T}}(t+\theta)P_{uv}^{-1}\tilde{A}_v(t+\theta)\leqslant P,\quad \forall t\geqslant 0,\quad u=1,2,\quad v=0,1,2 \tag{4.5.18}
$$

成立。

为应用 Razumikhin 定理，我们假设存在实常数 $q>1$ 使得下面的不等式满足：

$$V(x(\xi),\xi)<qV(x(t),t),\quad t-2\tau\leqslant\xi\leqslant t$$

那么再由(4.5.18)就有

$$\begin{aligned}&\sum_{u=1}^{2}\sum_{v=0}^{2}\int_{-d_u(t)}^{0}x^{\mathrm{T}}(t-d_u(t)+\theta)\tilde{A}_v^{\mathrm{T}}(t+\theta)P_{uv}\tilde{A}_v(t+\theta)x(t-d_u(t)+\theta)\mathrm{d}\theta\\&\leqslant\sum_{u=1}^{2}\sum_{v=0}^{2}\int_{-d_u(t)}^{0}x^{\mathrm{T}}(t-d_u(t)+\theta)Px(t-d_u(t)+\theta)\mathrm{d}\theta\\&\leqslant\sum_{u=1}^{2}\sum_{v=0}^{2}\int_{-d_u(t)}^{0}qx^{\mathrm{T}}(t)Px(t)\mathrm{d}\theta\leqslant\sum_{u=1}^{2}\tau_u\sum_{v=0}^{2}qx^{\mathrm{T}}(t)Px(t)\end{aligned}\tag{4.5.19}$$

再假设式(4.5.15)~(4.5.17)满足时，结合式(4.5.14)和式(4.5.19)，我们有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t),t)&\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)\left[P(A+BK+A_1+B_1K)+(A+BK+A_1+B_1K)^{\mathrm{T}}P+\tilde{\Delta}+\sum_{u=1}^{2}\tau_u\sum_{v=0}^{2}qP\right]\\&=x^{\mathrm{T}}(t)M_1x(t)\end{aligned}$$

其中，$\tilde{\Delta}$ 为所有的不确定项，它可以等价的表达为一个新的凸多面体，

$$\tilde{\Delta}=\sum_{ijrs\in T}\theta_{ijrs}\begin{pmatrix}PE_i+E_i^{\mathrm{T}}P+PF_j+F_j^{\mathrm{T}}P+G_rK+K^{\mathrm{T}}G_r^{\mathrm{T}}+H_sK+K^{\mathrm{T}}H_s^{\mathrm{T}}\\+\tau_1P(A_1+F_j)W_1(A_1+F_j)^{\mathrm{T}}P+\tau_2P(B_1+H_s)KW_2K^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}}P\end{pmatrix}$$

其中，$T=\{1,\cdots,k\}\times\{1,\cdots,l\}\times\{1,\cdots,p\}\times\{1,\cdots,q\}$。

显然 $\tilde{\Delta}$ 对不等式 $M_1<0$ 是凸的，如果在 $\tilde{\Delta}$ 的所有顶点满足 $M_1<0$，则必有整个 $\tilde{\Delta}$ 满足 $M_1<0$。

令 $X=P^{-1}$, $K=YX^{-1}$，并假设存在正标量 $\alpha>0$ 使得

$$X^{-1}W_2X^{-1}\leqslant\alpha^{-1}I\tag{4.5.20}$$

那么，如果

$$\begin{aligned}M_2=&(A+E_i)X+X(A+E_i)^{\mathrm{T}}+(A_1+F_j)X+(A_1+F_j)^{\mathrm{T}}X\\&+(B+G_s)Y+Y^{\mathrm{T}}(B+G_r)^{\mathrm{T}}+(B_1+H_s)Y+Y^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}}\\&+\tau_1(A_1+F_j)W_1(A_1+F_j)^{\mathrm{T}}+\tau_2\alpha^{-1}(B_1+H_s)YY^{\mathrm{T}}(B_1+H_s)^{\mathrm{T}}\\&+q\sum_{u=1}^{2}\sum_{v=0}^{2}\tau_uX<0\end{aligned}\tag{4.5.21}$$

其中，$(i,\ j,\ r,\ s)\in\{1,\cdots,k\}\times\{1,\cdots,l\}\times\{1,\cdots,p\}\times\{1,\cdots,q\}$，则有

$$\dot{V}(x(t),t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)M_1x(t)<0$$

令 $M=M_2,\ q=1$，显然 $x^{\mathrm{T}}(t)M_1x(t)$ 的值随着 τ_u 和 q 的增加而单调增加。因此如果对某些 $X,\ P_{uv}$ 和标量 $\alpha>0$ 满足不等式(4.5.15)~(4.5.17), (4.5.20)以及 $M<0$，那么必然存在一充分小的 $q,\ q>1$ 对任意的 $0\leqslant d_u(t)\leqslant\tau_u\leqslant\tau,\ t\geqslant0,\ u=1,2$，闭环系统有

$$\dot{V}(x(t),t)\leqslant-\lambda_{\max}(M_1)\|x(t)\|^2$$

由 Razumikhin 定理，不确定线性时滞系统(4.5.1), (4.5.2)在控制 $u(t)=YX^{-1}x(t)$ 的作用下是鲁棒渐进稳定的。证毕。

由于不等式约束(4.5.20)是一个非线性矩阵不等式，不能与线性矩阵不等式(4.5.4)~(4.5.6)一起联立求解。不过，同样可以通过如下的广义特征值得最小化问题：

问题 4.5.1

$$\text{最小化}\ \gamma$$

$$\text{约束：式(4.5.3)\textasciitilde(4.5.6)及}\ W_2<\gamma X,\ I<\gamma X$$

再联立求解线性矩阵不等式，最小化 γ。我们可以给出下面的算法对 α 进行一维搜索。

方法 4.5.1

(1) 给定 ε 为一个足够小的数，确定 α 的两个初值，一般可取 $\alpha_1=0,\ \alpha_2$ 为一个足够大的数，使得问题 4.5.1 有解， 如果(4.5.20) 满足，则得到一组可行解。

(2) 假设(4.5.20)不满足，令 $\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)/2$，求解问题 4.5.1，如果 $\alpha_2-\alpha_1\geqslant\varepsilon$，则令 $\alpha_1=\alpha$ 转到(2)， $\alpha_2-\alpha_1<\varepsilon$ 则算法失效，有解则验证不等式(4.5.20)，满足则找到一组可行解，不满足而且 $\alpha_2-\alpha_1<\varepsilon$ 则算法失效，否则令 $\alpha_2=\alpha$。

基于以上方法，当系统(4.5.1), (4.5.2)的某一时滞上界已知时可以通过对另一 τ_u 的一维搜索，得到另一时滞 τ_u 的上界，使得对所有的 $0\leqslant d_u(t)\leqslant\tau_u,\ t\geqslant0$ 的系统鲁棒可镇定。或者通过对共同的时滞上界 τ 的一维搜索，可以找到一个最大 τ^* 使得任意的 $0\leqslant d_u(t)\leqslant\tau_u\leqslant\tau^*,\ t\geqslant0,\ u=1,2$ 系统都是鲁棒可镇定的。

例 4.5.1　考虑具有如下参数的线性不确定时滞系统(4.5.1)：

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&-2\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0&0.1\\0.1&0.1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix}$$

$$\Delta A=\begin{bmatrix}0 & 0.3\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix}\sin(t),\quad \Delta A_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix}\sin(t)$$

$$\Delta B=\begin{bmatrix}0.2\\ 0\end{bmatrix}\sin(t),\quad \Delta B_1=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}\sin(t)$$

其中，$s>0$，且有

$$d(t)=\left|0.2\sin(t)\right|,\quad h(t)=\left|0.3\cos(t)\right|,\quad \phi(t)=\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad t\in\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}$$

将不确定性描述为凸多面体型，有

$$E_1=-E_2=\begin{bmatrix}0 & -0.3\\ -0.1 & -0.2\end{bmatrix},\quad F_1=-F_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -0.1 & -0.1\end{bmatrix}$$

$$G_1=\begin{bmatrix}-0.2\\ 0\end{bmatrix},\quad G_2=\begin{bmatrix}0.2\\ 0\end{bmatrix},\quad H_1=\begin{bmatrix}-0.1\\ -0.1\end{bmatrix},\quad H_2=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1(t)=\gamma_1(t)=\eta_1(t)=\frac{1-\sin(t)}{2},\quad \beta_1(t)=\frac{1-\cos(t)}{2}$$

$$\alpha_2(t)=\gamma_2(t)=\eta_2(t)=\frac{1+\sin(t)}{2},\quad \beta_2(t)=\frac{1+\cos(t)}{2}$$

采用方法 4.5.1，当$\alpha=0.001$时可得一组可行解

$$X=\begin{bmatrix}0.1483 & -0.0248\\ -0.0248 & 0.2255\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-0.0546 & -0.0192\end{bmatrix}$$

线性状态反馈控制律为

$$u(t)=Kx(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-0.3897 & -0.1279\end{bmatrix}x(t)$$

4.6　具有凸多面体不确定参数的离散时滞系统的时滞依赖镇定

目前众多时滞系统鲁棒镇定结论均是针对连续时间系统而言，而针对离散时滞时间系统的却较少。主要原因之一是离散线性定常时滞系统可以转化为高维无时滞的离散线性系统，这样可以借助于离散线性系统的控制律设计方法来获得控制律。但是当时滞未知时，这一方法不再有效。本节考虑到这一问题，采用 Lyapunov 理论研究不确定离散时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定问题。

考虑如下的不确定线性离散时滞系统：

$$x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k-\tau)+Bu(k)+B_du(k-\tau)$$
$$x(t)=\phi(k),\quad -\tau\leqslant k\leqslant 0 \tag{4.6.1}$$

其中，$x(k)\in R^n$ 为状态变量，$u(k)\in R^m$ 为系统输入变量，$\tau>0$ 为整数时滞，定义 $\bar{\tau}=\max\tau$ 同时假定所有的状态可测。$\phi(k)$ 为系统的初始状态变量。系统矩阵 A、A_d、B、B_d 位于式(4.6.2)描述的凸多面体内

$$(A,\ A_d,\ B,\ B_d)\in S:=\left\{(A,\ A_d,\ B,\ B_d)\,|\,(A,\ A_d,\ B,\ B_d)=\sum_{i=1}^{N}\xi_i(A_i,\ A_{di},\ B_i,\ B_{di});\ \xi_i\geqslant 0;\ \sum_{i=1}^{N}\xi_i=1;\right\} \tag{4.6.2}$$

其中，$(A_i,\ A_{di},\ B_i,\ B_{di})(i=1,2,\cdots,N)$ 为凸多面体的顶点。

本节的研究目的是设计无记忆状态反馈控制律 $u(k)=Kx(k)$，使得闭环系统在所有不确定性(4.6.2)下是大范围鲁棒稳定的。

我们首先引入如下引理：

引理 4.6.1　对于适当维数的向量 $a,\ b$ 和矩阵 $N,\ X,\ Y,\ Z$，其中 X 和 Z 是对称的，若

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}\geqslant 0$$

则有

$$-2a^{\mathrm{T}}Nb\leqslant \inf_{X,Y,Z}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^{\mathrm{T}}-N^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned}
-2a^{\mathrm{T}}Nb&=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\\
&\leqslant\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\\
&\leqslant\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^{\mathrm{T}}-N^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

证毕。　□

把控制律 $u(k)=Kx(k)$ 代入(4.6.1)得到如下的闭环系统:

$$x(k+1)=\tilde{A}x(k)+\tilde{A}_d x(k-\tau) \tag{4.6.3}$$

其中，$\tilde{A}=A+BK$, $\tilde{A}_d=A_d+B_dK$。对于该闭环系统的鲁棒稳定性，我们有如下定理:

定理 4.6.1　对于给定整数 $\bar{\tau}>0$，闭环系统(4.6.3)对于任意时滞 $\tau\in[0,\ \bar{\tau}]$ 都是鲁棒稳定的，如果存在对称正定矩阵 X, H, Q, Z 和矩阵 V 满足

$$\begin{bmatrix} \Gamma & -V & \bar{A}_i^{\mathrm{T}}X & \bar{\tau}(\bar{A}_i-I)^{\mathrm{T}}Z \\ -V & -Q & \bar{A}_{di}^{\mathrm{T}}X & \bar{\tau}\bar{A}_{di}^{\mathrm{T}}Z \\ X\bar{A}_i & X\bar{A}_{di} & -X & 0 \\ \bar{\tau}Z(\bar{A}_i-I) & \bar{\tau}Z\bar{A}_{di} & 0 & -\bar{\tau}Z \end{bmatrix}<0 \tag{4.6.4a}$$

$$i=1,2,\cdots N$$

$$\begin{bmatrix} H & V \\ V^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{4.6.4b}$$

其中

$$\Gamma=-X+\bar{\tau}H+V+V^{\mathrm{T}}+Q$$

证明　取如下的 Lyapunov 函数:

$$V(x(k))=x^{\mathrm{T}}(k)Xx(k)+\sum_{\theta=k-\bar{\tau}}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)+\sum_{\theta=-\bar{\tau}}^{-1}\sum_{s=k+\theta}^{k-1}\Delta x^{\mathrm{T}}(s)Z\Delta x(s) \tag{4.6.5}$$

其中，$\Delta x(k)=x(k+1)-x(k)$，显然有

$$\sum_{\theta=k-\tau}^{k-1}\Delta x(\theta)=x(k)-x(k-\tau) \tag{4.6.6}$$

这样系统(4.6.3)可以写成

$$x(k+1)=(\tilde{A}+\tilde{A}_d)x(k)-\tilde{A}_d\sum_{\theta=k-\tau}^{k-1}\Delta x(\theta) \tag{4.6.7}$$

考虑最坏情形 $\bar{\tau}=\tau$，同时对 $V(x(k))$ 取前向差分

$$
\begin{aligned}
\Delta V(x(k)) = & x^{\mathrm{T}}(k)\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}} X\tilde{A} + 2\tilde{A}^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d + 2\tilde{A}_d^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d - X + Q\right)x(k) \\
& - 2x^{\mathrm{T}}(k)\tilde{A}_d^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d x(k-\bar{\tau}) + x^{\mathrm{T}}(k-\bar{\tau})\left(\tilde{A}_d^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d - Q\right)x(k-\bar{\tau}) \\
& + \bar{\tau}\Delta x^{\mathrm{T}}(k)Z\Delta x(k) - \sum_{\theta=k-\bar{\tau}}^{k-1} \Delta x^{\mathrm{T}}(\theta)Z\Delta x(\theta) \\
& - 2x^{\mathrm{T}}(k)(\tilde{A}+\tilde{A}_d)^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d \sum_{\theta=k-\bar{\tau}}^{k-1} \Delta x(\theta)
\end{aligned} \tag{4.6.8}
$$

由引理 4.6.1 知，如式(4.6.4b)成立，则有

$$
\begin{aligned}
& - 2x^{\mathrm{T}}(k)(\tilde{A}+\tilde{A}_d)^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d \sum_{\theta=k-\bar{\tau}}^{k-1} \Delta x(\theta) \\
& \leqslant \bar{\tau} x^{\mathrm{T}}(k)Hx(k) + 2x^{\mathrm{T}}(k)\left(V - (\tilde{A}+\tilde{A}_d)^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d\right) \sum_{\theta=k-\bar{\tau}}^{k-1} \Delta x(\theta) \\
& + \sum_{\theta=k-\bar{\tau}}^{k-1} \Delta x^{\mathrm{T}}(\theta)Z\Delta x(\theta)
\end{aligned} \tag{4.6.9}
$$

综合式(4.6.8)和式(4.6.9)，有

$$
\Delta V(x(k)) \leqslant \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-\tau) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \varLambda_d \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-\tau) \end{bmatrix} \tag{4.6.10}
$$

其中

$$
\varLambda_d = \begin{bmatrix} \varPi & \tilde{A}^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d - V + \bar{\tau}(\tilde{A}-I)^{\mathrm{T}} Z\tilde{A}_d \\ * & -Q + \tilde{A}_d^{\mathrm{T}} X\tilde{A}_d + \bar{\tau}\tilde{A}_d^{\mathrm{T}} Z\tilde{A}_d \end{bmatrix}
$$

$$
\varPi = \tilde{A}^{\mathrm{T}} X\tilde{A} - X + \bar{\tau}H + V + V^{\mathrm{T}} + Q + \bar{\tau}(\tilde{A}-I)^{\mathrm{T}} Z(\tilde{A}-I)
$$

显然，如果(4.6.9)成立，则对于足够小的 $\varepsilon > 0$ 有

$$
\Delta V(x(k)) \leqslant -\varepsilon\|x(k)\|^2 \tag{4.6.11}
$$

成立。由 Schur 引理及式(4.6.4)的凸性，知式(4.6.4)保证了 $\varLambda_d < 0$，从而式(4.6.11)成立。系统是大范围渐进稳定的。证毕。

对于未知的控制律增益 K，式(4.6.4)为非线性矩阵不等式，求解起来比较困难。对之作适当变形，可以得到如下定理。

定理 4.6.2 对于给定整数 $\bar{\tau} > 0$，闭环系统(4.6.3)对于任意时滞 $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ 都

是鲁棒稳定，如果存在对称正定矩阵 Y、M、W、R 和矩阵 L、N 满足

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & -N & \Phi_{13i} & \bar{\tau}(\Phi_{13i}-L)^{\mathrm{T}}Z \\ -N^{\mathrm{T}} & -W & \Phi_{23i} & \bar{\tau}\Phi_{24i} \\ \Phi_{13i}^{\mathrm{T}} & \Phi_{23i}^{\mathrm{T}} & -Y & 0 \\ \bar{\tau}Z(\Phi_{13i}-L) & \bar{\tau}\Phi_{24i}^{\mathrm{T}} & 0 & -\bar{\tau}R \end{bmatrix} < 0 \tag{4.6.12a}$$

$$i = 1,2,\cdots,N$$

$$\begin{bmatrix} M & N \\ N^{\mathrm{T}} & R^{-1} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.6.12b}$$

其中

$$\Phi_{11} = -Y + \bar{\tau}M + N + N^{\mathrm{T}} + W$$

$$\Phi_{14i} = \Phi_{15i} = YA_i^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}$$

$$\Phi_{24i} = \Phi_{25i} = YA_{di}^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{T}}B_{di}^{\mathrm{T}}$$

若该矩阵不等式可行，则一个合适的鲁棒镇定控制律为

$$u(k) = LY^{-1}x(k) \tag{4.6.13}$$

证明 在式(4.6.4a)的左右分别乘以 $\mathrm{diag}\left\{X^{-1},X^{-1},Z^{-1}\right\}$，在式(4.6.4b)的左右分别乘以 $\mathrm{diag}\left\{X^{-1},Z^{-1}\right\}$，同时令 $Y=X^{-1}$, $M=X^{-1}HX^{-1}$, $N=X^{-1}VX^{-1}$, $W=X^{-1}QX^{-1}$, $R=Z^{-1}$, $L=KY$，则得到不等式(4.6.11)。证毕。

虽然式(4.6.13)给出了控制律的数学表达式，但由于式(4.6.12b)是非线性矩阵不等式，不能同式(4.6.12a)联立求解。为了解决该非凸问题，一种最简单的处理方法就是固定 R，当然也可以设定 $R=\varepsilon I$, $\varepsilon>0$，然后通过一维搜索来获得使系统(4.6.3)鲁棒稳定的最大时滞值。但这两种方法带来了极大的保守性。下面给出另外一种处理方法。

方法 4.6.1 引进新的变量 $S \leqslant R^{-1}$，则(4.6.12b)成立，如果

$$\begin{bmatrix} M & N \\ N^{\mathrm{T}} & S \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad S \leqslant R^{-1} \tag{4.6.14}$$

又因 $S \leqslant R^{-1}$ 等价于 $R \leqslant S^{-1}$，则上述条件(4.6.14)又等价于

$$\begin{bmatrix} M & N \\ N^{\mathrm{T}} & S \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} S^{-1} & I \\ I & R^{-1} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.6.15}$$

因此，通过引进新的矩阵 T、J，式(4.6.12b)可写为

$$\begin{bmatrix} M & N \\ N^{\mathrm{T}} & S \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} T & I \\ I & J \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad T = S^{-1}, \quad J = R^{-1} \tag{4.6.16}$$

进一步，上述不等式可以写成

$$\left.\begin{aligned} &\text{最小化} \quad \mathrm{Trace}(ST + RJ) \\ &\text{约束：} \quad \text{式(4.6.11a)和} \\ &\qquad \begin{bmatrix} M & N \\ N^{\mathrm{T}} & S \end{bmatrix} \geqslant 0, \begin{bmatrix} T & I \\ I & J \end{bmatrix} \geqslant 0 \\ &\qquad T > 0,\ J > 0 \\ &\qquad \begin{bmatrix} S & I \\ I & T \end{bmatrix} \geqslant 0, \begin{bmatrix} R & I \\ I & J \end{bmatrix} \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.6.17}$$

因此可以设计如下的算法：

(1) 选择一个足够小的 $\tau > 0$ 使得式(4.6.12a)存在一个可行解，令 $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}$。

(2) 找到一组 $(Y_0,\ M_0,\ W_0,\ L_0,\ N_0,\ R_0,\ T_0, J_0)$ 满足式(4.6.12a)和式(4.6.17)，令 $k = 0$。

(3) 解如下的凸优化问题：

$$\text{最小化}\ \mathrm{Trace}(S_k T + T_k S + R_k J + J_k R)$$

$$\text{约束：式(4.6.12a)和式(4.6.17)}$$

令 $J_{k+1} = J,\ R_{k+1} = R,\ S_{k+1} = S,\ T_{k+1} = T$。

(4) 如果条件(4.6.12b)得到满足，则令 $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}$，返回(2)，增加 τ，如果条件(4.6.11b)没有满足，且有 $k > k^*$，则退出，否则 $k = k + 1$。

4.7　注　　记

本章重点研究了具有范数有界以及凸多面体不确定性的线性时滞系统的鲁棒控制问题，所得结论均以线性矩阵不等式的形式给出。

本章的主要内容来源于作者的研究成果。

参 考 文 献

俞立，褚健. 1998. 具有输入滞后的不确定系统的鲁棒镇定. 控制理论与应用, 15(2): 274-280.

俞立. 1991. 不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计. 控制理论与应用, 8(1):68-73.

Barmish B R. 1983. Stabilization of uncertain systems via linear control. IEEE Trans Auto Contr., 28:848-850.

Barmish B R. 1985. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of uncertain systems. J. Optim. Theory Appl., 46(4):399-408.

Chen W H, Guan Z H, Lu X. 2003. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. IEE Proc. Control Theory and Appl., 150(4):412-416.

Choi H H, Chung M J. 1995. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls. Automatica, 31(9):1349-1351.

Choi H H. 1994. Riccati equation approach to the memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with delayed control. Electron. Lett., 30:1100-1101.

Esfahani S H, Mohermani S O R, Petersen I R. 1998. LMI approach to suboptimal guaranteed cost control for uncertain time-delayed systems. IEE Proc. Control Theory Appl., 145(6):491-498.

Fridman E, Shaked U. 2002. A descriptor system approach to H_∞ control of time-delayed systems. IEEE Trans. Auto. Contr., 47(2):253-279.

Fridman E. 2001. New Lyapunov–Krasovskii functionals fir stability of linear retard and neutral type systems, Syst. Contr. Lett., 43: 309-319.

Hollot C V, Bartlett A C. 1986. Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems, IEEE Trans. Auto. Contr. 31: 355-356.

Kim J H, Jeung E T, Park H B. 1996. Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input. Autoamtica, 32(9):1337-1339.

Leitman G. 1979. Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties. ASME J. Dynamical Systems, Measurement and Control, 101(1): 212-216.

Leitman G. 1981. On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems. J. Dynamic Syst., Measurements Contr., 103(1): 95-102.

Li X, de Souza C E. 1996a. Robust stabilization and H_∞ control of uncertain linear time-delay systems. Proc. of 13th Triennial Word Congress of IFAC, San Francisco, UAS, June 30-July 5, 137-142.

Li X, de Souza C E. 1996b. Criteria for robust stability of uncertain linear systems with time-varying state delays. Proc. of 13th World Congress of IFAC, San Francisco, UAS, June 30-July 5, 137-142.

Mahmoud M S, Al-muthairi N F. 1994. Design of robust controller for time-delay systems. IEEE Trans. Auto. Contr., 39(5):995-999.

Niculescu S I, de Souza C E, Dion J M, Dugard L. 1994. Robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay: single delay case (I). Proc of IFAC Symp. on Robust Control Design, Rio de Janeiro, Brazil, Sept.

Petersen I R, Hollot C V. 1986. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica, 22:397-411.

Petersen I R. 1987. Linear quadratic deferential games with cheap control. Sys. Control Letts., 8:181-188.

Phoojaruenchanachai S, Fuuta K. 1992. Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays. IEEE Trans. Auto. Contr., 39(9):1971-1977.

Shen J, Chen B, Kung F. 1991. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. IEEE Trans. Auto. Contr., 36(5):638-640.

Su H Y, Chu J, Wang J C, Wang S Q, Yu L. 1997. Robust stabilizing control for uncertain time-delay systems with output feedback. IFAC Sym. Advanced Control in Chemical Processes (ADCHEM)'97, Bangg, Canada. 149-154.

Su H Y, Chu J, Wang J C. 1998. A memoryless robust stabilizing control for a class of uncertain linear time-delay systems. Int. J. System Science, 29(2):191-197.

Su H Y, Lam J, Chu J. 1999. Robust controller design for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. 14th IFAC' 1999, Beijing, 145-150.

Su H Y, Wang J C, Chu J. 1997. Robust memoryless H_∞ controller design for a class of time-varying uncertain linear time-delay systems. Proc'97, Albuquerque NM, UAS, 6: 3662-3663.

Su T J, Huang C-G. 1992. Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems, IEEE Trans. Auto. Contr. 37(11):1656-1659.

Su T-H, Huang C-G. 1992. Robust stability of delay dependence for linera uncertain systems. IEEE Trans. Auto. Contr., 37(11):1656-1659.

Tseng C L, Fong I K, Su J H. 1994. Robust stability analysis for uncertain delay systems with output feedback controller. Syst. Contr. Lett., 23:271-278.

Yedavalli P K. 1993. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded domains. Automatica, 29(2):491-493.

Yu L, Chen G D. 1997. Memoryless stabilization of uncertain linear systems with time-varying state and control delays. Advan. Mod. Ana., Series C, 49(1):27-34.

Yu L, Holmberg U, Bonvin D. 1995. Decentralized robust stabilization of a class of interconnected uncertain delay systems. Contr. Theory and Advanced Tech., 10(4): 1475-1483.

Zhou K, Khargonekar P P. 1988. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. Syst. Contr. Letts., 11:85-91.

第 5 章　不确定线性时滞系统的性能鲁棒控制

5.1　引　　言

不确定线性时滞系统鲁棒稳定性分析和鲁棒镇定问题的研究历来是控制理论界研究的热点之一，特别是 Lyapunov 函数方法在这些研究中得到了广泛的应用，目前已经取得了很多的结果。但对实际系统来说，仅仅保证系统的鲁棒稳定性往往是不够的，在保证系统稳定的同时我们还要求系统的动态特性满足一定的性能指标，因此，在一定性能约束下的不确定线性时滞系统的鲁棒镇定问题的研究更具有实际意义。本章主要针对具有指定衰减度的鲁棒镇定、鲁棒 H_∞ 控制及保成本控制等几个方面详细阐述。

5.2　不确定线性时滞系统指定衰减度鲁棒镇定

系统的响应快慢是系统的瞬态响应的一项重要指标，通过与指数函数的比较可以大致确定系统的衰减速度，本节引入衰减度的概念，提出不确定线性时滞系统具有指定衰减度时滞依赖型鲁棒稳定判据和具有指定衰减度鲁棒可镇定的充分条件及相应的鲁棒控制器设计方法。同样可以看到，对指定的衰减度要求，通过求解二次凸规划问题，我们可以确定保证系统鲁棒稳定和鲁棒可镇定的时滞上界。

考虑如下的线性不确定时滞系统：

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)+(A_1+\Delta A_1(t))x(t-d(t))+(B+\Delta B)u(t)\\&x(t)=\phi(t),\quad t\in[-\tau,0]\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

其中，$x(t)\in R^n$ 是状态变量，$u(t)\in R^m$ 是控制输入向量；$A\in R^{n\times n}$，$A_1\in R^{n\times n}$，$B_0\in R^{n\times m}$ 是已知的定常矩阵。矩阵 $\Delta A(t)$、$\Delta A_1(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 代表系统模型中的时变不确定性，为连续的实矩阵函数并具有恰当的维数。$d(t)$ 是表示状态滞后的时变未知但有界的标量，并假设存在正实数 τ 对所有的 t 满足

$$0\leqslant d(t)\leqslant\tau\tag{5.2.2}$$

$\phi(t)$ 是连续光滑的初始向量函数，它属于 Banach 空间 $C^n[-\tau,0]$ 上的光滑函数

$$\Psi:[-\tau,0]\mapsto R^n,\quad \|\Psi\|_\infty := \sup_{-\tau\leqslant\eta\leqslant 0}\|\psi\| \tag{5.2.3}$$

在本节中，假设不确定性具有以下的形式：

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta B(t)\end{bmatrix} = H_1F_1(t)\begin{bmatrix}E_1 & E_3\end{bmatrix},\quad \Delta A_1(t) = H_2F_2(t)E_2 \tag{5.2.4}$$

其中，$F_k(t)\in R^{i\times j}(k=1,2)$是未知的实时变矩阵，其元素是 Lebesgue 可测的，并满足

$$F_k^{\mathrm{T}}(t)F_k(t)\leqslant I,\quad k=1,2 \tag{5.2.5}$$

其中，H_i、$E_i(i=1,2,\ j=1,2,3)$是已知的实定常矩阵并具有恰当的维数，它们表明$F_k(t)(k=1,2)$是如何影响系统标称矩阵A、A_1、B的。

为了简便起见，记

$$A(t)=A+\Delta A(t),\quad A_1(t)=A_1+\Delta A_1(t),\quad B(t)=B+\Delta B(t) \tag{5.2.6}$$

显然，如果一个线性系统其状态的零输入响应收敛于零状态，那么通过与指数衰减函数$\mathrm{e}^{-\lambda t}(t>0)$的比较可以大致确定其收敛的速度，由此我们引入如下的定义：

定义 5.2.1　不确定线性时滞系统(5.2.1)是具有衰减度$\lambda(\lambda>0)$鲁棒稳定的，如果在引入形如

$$z(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}x(t),\quad \lambda>0 \tag{5.2.7}$$

的状态变换后，泛函微分方程(5.2.1)在$u(t)\equiv 0$时其$z(t)\equiv 0$的平凡解对所允许的不确定性是渐进稳定的。不确定时滞系统(5.2.1)是具有衰减度$\lambda(\lambda>0)$鲁棒可镇定的，如果存在一个无记忆线性状态反馈控制律$u(t)=Kx(t)$使得闭环系统是具有衰减度$\lambda(\lambda>0)$鲁棒稳定的。

首先针对$u(t)\equiv 0$时的不确定时滞系统(5.2.1)，给出一个具有指定衰减度时滞依赖型鲁棒稳定性条件。假设系统(5.2.1)在$u(t)\equiv 0$，$F(t)\equiv 0$和$d(t)=0$是渐进稳定的，即$A+A_1$是一个稳定矩阵。

定理 5.2.1　对于不确定线性时滞系统(5.2.1)($u(t)\equiv 0$)，给定标量τ满足(5.2.2)及其$\lambda(\lambda>0)$，那么系统是具有衰减度$\lambda(\lambda>0)$鲁棒稳定的，如果存在正定对称矩阵X、P_1、P_2和标量$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \varepsilon>0$满足以下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} S & M_1 & M_2 \\ M_1^{\mathrm{T}} & -N_1 & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}} & 0 & -N_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{5.2.8a}$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathrm{e}^{\lambda\tau} XA^{\mathrm{T}} & \mathrm{e}^{\lambda\tau} XE_1^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{e}^{\lambda\tau} AX & P_1 - \beta_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ \mathrm{e}^{\lambda\tau} E_1 X & 0 & \beta_1 I \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.2.8b}$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathrm{e}^{2\lambda\tau} XA_1^{\mathrm{T}} & \mathrm{e}^{2\lambda\tau} XE_2^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{e}^{2\lambda\tau} A_1 X & P_2 - \beta_2 H_2 H_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ \mathrm{e}^{2\lambda\tau} E_2 X & 0 & \beta_2 I \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.2.8c}$$

其中

$$S = 2(\lambda+\tau)X + AX + XA^{\mathrm{T}} + A_1X + XA_1^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i H_i H_i^{\mathrm{T}} + \tau\varepsilon H_2 H_2^{\mathrm{T}} + \tau A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} XE_1^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \mathrm{diag}\{\alpha_1 I,\ \alpha_2 I\}$$

$$M_2 = \tau A_1(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}, \quad N_2 = \tau\left[\varepsilon I - E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\right]$$

证明 通过如下的状态变换:

$$x(t-d(t)) = x(t) - \int_{-d(t)}^{0} \dot{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta \tag{5.2.9}$$

使得$u(t)\equiv 0$时的不确定线性时滞系统(5.2.1)是下述系统的一个特例:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[A(t)+A_1(t)\right]x(t) \\ &\quad - \int_{-d(t)}^{0} A_1(t)\left[A(t+s)x(t+s) + A_1(t+s)x(t-d(t)+s)\right]\mathrm{d}s \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t\in\left[-2\tau, 0\right] \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

其中，$\varphi(t)$是连续光滑的初始向量函数。因此如果系统(5.2.10)是具有指定衰减度鲁棒稳定的，那么系统(5.2.1)亦是指定衰减度鲁棒稳定的。

对系统(5.2.10)作变换$z(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}x(t),\ \lambda>0$，如果变换后的系统是鲁棒渐进稳定的，则系统(5.2.1)是具有衰减度$\lambda(\lambda>0)$鲁棒稳定的。

选取变换后系统的 Lyapunov 方程为

$$V(z(t),t)=z^{\mathrm{T}}(t)Pz(t)$$

其中，P 是正定对称矩阵。$V(z(t),t)$ 沿系统(5.2.10)的轨迹关于时间 t 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(z(t),t)&=\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)Pz(t)z+z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t)\\&=\left[\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}x(t)+\mathrm{e}^{\lambda t}\dot{x}(t)\right]^{\mathrm{T}}Px(t)+z^{\mathrm{T}}(t)P\left[\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}x(t)+\mathrm{e}^{\lambda t}\dot{x}(t)\right]\\&=z^{\mathrm{T}}(t)\left\{\left[\lambda I+A(t)+A_1(t)\right]^{\mathrm{T}}P+P\left[\lambda I+A(t)+A_1(t)\right]\right\}z(t)+L(z(t),x(t),t)\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

其中

$$\begin{aligned}&L(z(t),x(t),t)\\&=-2z^{\mathrm{T}}(t)P\int_{-d(t)}^{0}A_1(t)\left[A(t+s)\mathrm{e}^{\lambda t}x(t+s)+A_1(t+s)\mathrm{e}^{\lambda t}x(t-d(t)+s)\right]\mathrm{d}s\\&=-2z^{\mathrm{T}}(t)P\int_{-d(t)}^{0}A_1(t)\left[\mathrm{e}^{-\lambda s}A(t+s)z(t+s)+\mathrm{e}^{\lambda(d(t)-s)}A_1(t+s)z(t-d(t)+s)\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由引理 4.2.3 和引理 4.3.1，可得

$$\dot{V}(z(t),t)\leqslant z^{\mathrm{T}}(t)W_1z(t)+L(z(t),t) \tag{5.2.12}$$

其中

$$\begin{aligned}W_1=&(\lambda I+A+A_1)^{\mathrm{T}}P+P(\lambda I+A+A_1)\\&+\alpha_1PH_1H_1^{\mathrm{T}}P+\alpha_2PH_2H_2^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\alpha_1}E_1^{\mathrm{T}}E_1+\frac{1}{\alpha_2}E_2^{\mathrm{T}}E_2\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}L(z(t),t)\leqslant&\ \tau z^{\mathrm{T}}(t)PA_1(t)P_1A_1^{\mathrm{T}}Pz(t)\\&+\int_{-d(t)}^{0}z^{\mathrm{T}}(t+s)\mathrm{e}^{-\lambda s}A^{\mathrm{T}}(t+s)P_1^{-1}A(t+s)\mathrm{e}^{-\lambda s}z(t+s)\mathrm{d}s\\&+\tau z^{\mathrm{T}}(t)PA_1(t)P_2A_1^{\mathrm{T}}(t)Pz(t)\\&+\int_{-d(t)}^{0}z^{\mathrm{T}}(t-d(t)+s)\mathrm{e}^{\lambda(d(t)-s)}A_1^{\mathrm{T}}(t+s)P_2^{-1}A_1(t+s)\mathrm{e}^{\lambda(d(t)-s)}z(t-d(t)+s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

应用引理 4.3.2，可得

$$
\begin{aligned}
L(z(t),t) \leqslant\ & \tau z^{\mathrm{T}}(t)P\Big[A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon H_2H_2^{\mathrm{T}} \\
&+A_1(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\left[\varepsilon I-E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\right]^{-1}E_2(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}\Big]Pz(t) \\
&+\int_{-d(t)}^{0} z^{\mathrm{T}}(t+s)\mathrm{e}^{-\lambda s}A^{\mathrm{T}}(t+s)P_1^{-1}A(t+s)\mathrm{e}^{-\lambda s}z(t+s)\mathrm{d}s \\
&+\int_{-d(t)}^{0} z^{\mathrm{T}}(t-d(t)+s)\mathrm{e}^{\lambda(d(t)-s)}A_1^{\mathrm{T}}(t+s)P_2^{-1}A_1(t+s)\mathrm{e}^{\lambda(d(t)-s)}z(t-d(t)+s)\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{5.2.13}
$$

P_1 和 P_2 为满足下述不等式的正定对称矩阵：

$$\varepsilon I-E_2(P_1+P_2)E_2>0,\quad \forall t\geqslant 0 \tag{5.2.14}$$

其中，$\varepsilon>0$ 为可选的标量。

假设存在标量 $\beta_i>0(i=1,2)$ 使得下面的不等式满足：

$$\mathrm{e}^{\lambda\tau}A^{\mathrm{T}}(P_1-\beta_1H_1H_1^{\mathrm{T}})^{-1}A\mathrm{e}^{\lambda\tau}+\beta_1^{-1}\mathrm{e}^{\lambda\tau}E_1^{\mathrm{T}}E_1\mathrm{e}^{\lambda\tau}\leqslant P \tag{5.2.15}$$

$$\mathrm{e}^{2\lambda\tau}A_1^{\mathrm{T}}(P_2-\beta_2H_2H_2^{\mathrm{T}})^{-1}A_1\mathrm{e}^{2\lambda\tau}+\beta_2^{-1}\mathrm{e}^{2\lambda\tau}E_2^{\mathrm{T}}E_2\mathrm{e}^{2\lambda\tau}\leqslant P \tag{5.2.16}$$

其中

$$P_1-\beta_1H_1H_1^{\mathrm{T}}>0 \tag{5.2.17}$$

$$P_2-\beta_2H_2H_2^{\mathrm{T}}>0 \tag{5.2.18}$$

应用引理 4.3.4， 我们可以得到

$$\mathrm{e}^{\lambda\tau}A^{\mathrm{T}}(t+s)P_1^{-1}A(t+s)\mathrm{e}^{\lambda\tau}\leqslant P,\quad \forall t\geqslant 0 \tag{5.2.19}$$

$$\mathrm{e}^{2\lambda\tau}A_1^{\mathrm{T}}(t+s)P_2^{-1}A_1(t+s)\mathrm{e}^{2\lambda\tau}\leqslant P,\quad \forall t\geqslant 0 \tag{5.2.20}$$

显然，对 $-\tau\leqslant -d(t)\leqslant s\leqslant 0$ 有

$$\mathrm{e}^{-\lambda s}A^{\mathrm{T}}(t+s)P_1^{-1}A(t+s)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\leqslant P,\quad \forall t\geqslant 0 \tag{5.2.21}$$

$$\mathrm{e}^{\lambda(d(t)-s)}A_1^{\mathrm{T}}(t+s)P_2^{-1}A_1(t+s)\mathrm{e}^{\lambda(d(t)-s)}\leqslant P,\quad \forall t\geqslant 0 \tag{5.2.22}$$

为应用 Razumikhin 定理，我们假设对某实常数 $q>1$，下面的不等式满足：

$$V(z(s),s)\leqslant qV(z(t),t),\quad t-2\tau\leqslant s\leqslant t \tag{5.2.23}$$

由式(5.2.21) ~ (5.2.23)，可得

$$\dot{V}(z(t),t) \leqslant z^{\mathrm{T}}(t)W_2 z(t) \tag{5.2.24}$$

其中

$$\begin{aligned}W_2 =& \left(\lambda I + A + A_1\right)^{\mathrm{T}} P + P\left(\lambda I + A + A_1\right) + \alpha_1 P H_1 H_1^{\mathrm{T}} P + \alpha_2 P H_2 H_2^{\mathrm{T}} P \\ &+ \frac{1}{\alpha_1} E_1^{\mathrm{T}} E_1 + \frac{1}{\alpha_2} E_2^{\mathrm{T}} E_2 + 2q\tau P + \tau P\left[A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon H_2 H_2^{\mathrm{T}}\right]P \\ &+ \tau P A_1 (P_1+P_2) E_2^{\mathrm{T}}\left[\varepsilon I - E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\right]^{-1} E_2(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}} P\end{aligned}$$

引入新的变量 $X = P^{-1}$，且令 $W_3 = XW_2X$，则有

$$\begin{aligned}W_3 =& X\left(\lambda I + A + A_1\right)^{\mathrm{T}} + \left(\lambda I + A + A_1\right)X + \alpha_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2 H_2 H_2^{\mathrm{T}} \\ &+ \frac{1}{\alpha_1} X E_1^{\mathrm{T}} E_1 X + \frac{1}{\alpha_2} X E_2^{\mathrm{T}} E_2 X + 2q\tau X + \tau\left[A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon H_2 H_2^{\mathrm{T}}\right] \\ &+ \tau A_1(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\left[\varepsilon I - E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\right]^{-1} E_2(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

显然，W_3 对 q 和 τ 是单调递增的，令 $W = W_3$，其中 $q = 1$。如果对某个 $\tau > 0$，存在正定对称矩阵 X、P_1、P_2 和正标量 $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0,\ \varepsilon > 0$ 满足不等式(5.2.14)~(5.2.18)及 $W < 0$，那么一定存在一个充分小的 $q > 1$ 使得对任意的 $0 \leqslant d(t) \leqslant \tau$ 有 $W_3 < 0$，即对任意的 $0 \leqslant d(t) \leqslant \tau$ 有 $\dot{V}(z(t),t) \leqslant -\alpha\|z(t)\|^2$，其中 $\alpha = -\lambda_{\max}(W_2) > 0$，$\lambda_{\max}(W_2)$ 表示矩阵 W_2 的最大特征值。

因此由 Razumikhin 定理，对任意的 $0 \leqslant d(t) \leqslant \tau$ 经式 (5.2.7) 变换后系统是渐进稳定的。这就隐含了对任意的 $0 \leqslant d(t) \leqslant \tau$ 和满足式(5.2.5)所允许的不确定性 $F_i(t)$，系统是鲁棒渐进稳定的且具有衰减度 λ。

最后，由 Schur 引理可知，$W < 0$ 以及式(5.2.14)~(5.2.18)等价于线性矩阵不等式(5.2.8)。证毕。

通过直接推广定理 5.2.1，我们可以得到系统(5.2.1)具有指定衰减度鲁棒可镇定的充分条件以及相应的控制器设计方法。

定理 5.2.2　对不确定线性时滞系统(5.2.1)，给定标量 τ 满足式(5.2.5)和 $\lambda(\lambda > 0)$，该系统具有衰减度 λ 鲁棒可镇定，如果存在对称正定矩阵 X、P_1、P_2，任意的矩阵 Y 和标量 $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0,\ \varepsilon > 0$，满足以下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} S & M_1 & M_2 \\ M_1^{\mathrm{T}} & -N_1 & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}} & 0 & -N_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{5.2.25a}$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathrm{e}^{\lambda\tau}(XA^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) & \mathrm{e}^{\lambda\tau}(XE_1^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}) \\ \mathrm{e}^{\lambda\tau}(AX + BY) & P_1 - \beta_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ \mathrm{e}^{\lambda\tau}(E_1 X + E_3 Y) & 0 & \beta_1 I \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.2.25b}$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathrm{e}^{2\lambda\tau}XA_1^{\mathrm{T}} & \mathrm{e}^{2\lambda\tau}XE_2^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{e}^{2\lambda\tau}A_1 X & P_2 - \beta_2 H_2 H_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ \mathrm{e}^{2\lambda\tau}E_2 X & 0 & \beta_2 I \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.2.25c}$$

其中

$$\begin{aligned} S = {} & 2(\lambda + \tau)X + AX + XA^{\mathrm{T}} + A_1 X + XA_1^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \\ & + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i H_i H_i^{\mathrm{T}} + \tau\varepsilon H_2 H_2^{\mathrm{T}} + \tau A_1 (P_1 + P_2) A_1^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} XE_1^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \mathrm{diag}\{\alpha_1 I,\ \alpha_2 I\}$$

$$M_2 = \tau A_1 (P_1 + P_2) E_2^{\mathrm{T}}, \quad N_2 = \tau\left[\varepsilon I - E_2 (P_1 + P_2) E_2^{\mathrm{T}}\right]$$

而且 $u(t) = YX^{-1}x(t)$ 是一个使得闭环系统鲁棒稳定且具有指定衰减度 λ 的无记忆状态反馈控制律。

证明　假设引入状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$，则闭环系统可写为

$$\dot{x}(t) = \left[A_c + H_1 F_1(t) E_c\right]x(t) + (A_1 + H_2 F_2(t) E_2)x(t - d(t)) \tag{5.2.26}$$

其中

$$A_c = A + BK, \quad E_c = E_1 + E_3 K$$

对闭环系统应用定理 5.2.1，并注意到 $K = YX^{-1}$，则可以得到定理 5.2.2。证毕。

基于定理 5.2.1，通过求解以下的 LMI 问题可求得使得时滞系统(5.2.26)具有衰减度 λ 鲁棒稳定的时滞上界 τ。

问题 5.2.1

最大化 τ

约束：线性矩阵不等式(5.2.8)

且有　$X>0,\ P_1>0,\ P_2>0;\quad \alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \varepsilon>0$

同样基于定理 5.2.2，通过求解以下的 LMI 问题可求得使得时滞系统(5.2.1)具有衰减度 λ 鲁棒可镇定的时滞上界 τ 。

问题 5.2.2

最大化 τ

约束：线性矩阵不等式(5.2.25)

具有 $X>0,\ P_1>0,\ P_2>0;\quad \alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \varepsilon>0$

下面用一个数值例子来说明本节给出定理的有效性。

例 5.2.1　考虑如下的线性不确定时滞系统：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$$

$$H_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad H_2=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.1\end{bmatrix},\quad E_1=E_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\end{bmatrix},\quad E_3=1$$

而且，$F_1(t)=F_2(t)=\sin(t),\ d(t)=0.1|\sin(t)|,\ \phi(t)=\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

取 $\lambda=0,\ \lambda=1.2$，可分别求得相应的控制器增益为

$$K=\begin{bmatrix}-0.6281 & -0.0724\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}-1.8123 & -0.6810\end{bmatrix}$$

5.3　不确定线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

Zames 提出的基于状态空间模型的 LQG 设计方法之所以鲁棒性不强，主要是由 LQG 使用的积分指标造成的；另外，用白噪声模型表示不确定干扰也是不现实的。因此，在假设干扰属于某一已知信号集的情况下，他提出用其相应灵敏度函数的 H_∞ 范数作为指标，设计目标是在可能发生的最坏干扰下使系统的误差在这种范数意义下达到极小，从而将干扰化成求解使得闭环系统稳定，并使相应 H_∞ 范数指标极小化的反馈控制器设计问题。同时，由于工程系统中不可避免的不确定性和时滞，使得不确定线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制具有很大的理论意义与工程价值。

5.3.1 问题描述

考虑如下的线性不确定时滞系统：

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t)+(A_1+\Delta A_1)x(t-d(t)) \\
&\quad +(B+\Delta B)u(t)+(B_1+\Delta B_1)u(t-h(t))+(B_2+\Delta B_2)w(t) \\
z(t) &= (C+\Delta C)x(t)+(C_1+\Delta C_1)x(t-d(t)) \\
&\quad +(D+\Delta D)u(t)+(D_1+\Delta D_1)u(t-h(t))+(B_3+\Delta B_3)w(t) \\
x(t) &= \phi(t),\ t\in\left[-\max(d(t),h(t)),0\right]
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

其中，$x(t)\in R^n$ 是状态向量，$u(t)\in R^{m_1}$ 是控制输入向量，$z(t)\in R^{m_2}$ 是系统的输出向量，$\omega(t)\in R^{m_3}$ 是系统的干扰输入向量。$A\in R^{n\times n}$，$A_1\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times m_1}$，$B_1\in R^{n\times m_1}$，$B_2\in R^{n\times m_3}$，$C\in R^{m_2\times n}$，$C_1\in R^{m_2\times n}$，$D\in R^{m_2\times m_1}$，$D_1\in R^{m_2\times m_1}$ 和 $B_3\in R^{m_2\times m_3}$ 是已知的实常数矩阵。ΔA、ΔA_1、ΔB、ΔB_1、ΔC、ΔC_1、ΔD、ΔD_1 和 ΔB_3 是具有适当维数的实函数矩阵，表示系统的不确定性。$d(t)$ 和 $h(t)$ 分别表示系统的状态和控制滞后，且存在正实数 d^*、h^*、ρ_d 和 ρ_h 使得对所有的时间 t，满足

$$\begin{aligned}
0\leqslant d(t)\leqslant d^*<\infty,\quad \dot{d}(t)\leqslant\rho_d<1 \\
0\leqslant h(t)\leqslant h^*<\infty,\quad \dot{h}(t)\leqslant\rho_h<1
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

并假设 $d(t)\neq h(t),\ t\in\left[0,\max(d(t),h(t))\right]$。$\phi(t)$ 是定义在 Banach 空间 $C^n[-\tau,0]\left(\tau=\max(d(t),h(t))\right)$ 上的光滑函数

$$\psi:[-\tau,0]\mapsto R^n,\quad \|\psi\|_\infty:=\sup_{-\tau\leqslant\zeta\leqslant0}\|\psi(\zeta)\|$$

表示系统的初始条件。为简便起见我们引入

$$\begin{aligned}
&\bar{A}=A+\Delta A,\quad \bar{A}_1=A_1+\Delta A_1,\quad \bar{B}=B+\Delta B,\quad \bar{B}_1=B_1+\Delta B_1,\quad \bar{B}_2=B_2+\Delta B_2 \\
&\bar{C}=C+\Delta C,\quad \bar{C}_1=C_1+\Delta C_1,\quad \bar{D}=D+\Delta D,\quad \bar{D}_1=D_1+\Delta D_1,\quad \bar{B}_3=B_3+\Delta B_3
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

我们首先给出鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 可镇定的定义。

定义 5.3.1 针对线性不确定时滞系统(5.3.1)，给定正标量 $\gamma>0$，如果存在正定对称矩阵 $P,\ R_1,\ R_2\in R^{n\times n}$ 和标量 $\varepsilon>0$ 使得下列不等式满足：

$$\begin{bmatrix} S_1 & P\bar{A} & P\bar{B}K & P\bar{B}_2 & \bar{C}^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}\bar{D}^{\mathrm{T}} \\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 & 0 & \bar{C}_1^{\mathrm{T}} \\ K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}R & 0 & -(1-\rho_h)R_2 & 0 & K^{\mathrm{T}}\bar{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I & \bar{B}_3^{\mathrm{T}} \\ \bar{C}+\bar{D}K & \bar{C}_1 & \bar{D}_1K & \bar{B}_3 & -I \end{bmatrix}<0 \tag{5.3.4}$$

其中，$S_1=\bar{A}^{\mathrm{T}}P+P\bar{A}+K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}P+P\bar{B}K+R_1+R_2+\varepsilon I$，则称系统(5.3.1)是鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 可镇定的，且称控制器 $u(t)=Kx(t)$ 为一鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 镇定控制器。

基于定义 5.3.1 我们有如下定理：

定理 5.3.1　如果系统(5.3.1)是鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 可镇定的，则引入控制器 $u(t)=Kx(t)$ 后，闭环系统是在 $w(t)=0$ 时是鲁棒二次稳定的，且在零初始条件(即 $x(t)=\phi(t)$，$t\in\left[-\max(d(t),h(t)),0\right]$)下，系统的闭环输出满足鲁棒 H_∞ 范数约束条件

$$\|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2 \tag{5.3.5}$$

证明　假设存在正定对称矩阵 P, R_1, $R_2\in R^{n\times n}$ 和矩阵 $K\in R^{m_1\times n}$ 使得矩阵不等式(5.3.4)成立。引入线性状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$，并考虑如下的闭环系统 Lyapunov 函数：

$$V(x(t),w(t),t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-d(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_1x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_2x(s)\mathrm{d}s \tag{5.3.6}$$

则其沿着系统(5.3.1)的解，$V(x(t),w(t),t)$ 关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(x(t),w(t),t)\\
&=\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t)+x^{\mathrm{T}}(t)(R_1+R_2)x(t)\\
&\quad-(1-\dot{d}(t))x^{\mathrm{T}}(t-d(t))R_1x(t-d(t))-(1-\dot{h}(t))x^{\mathrm{T}}(t-h(t))R_2x(t-h(t))\\
&=x^{\mathrm{T}}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}Px(t)\\
&\quad+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}Kx(t)+x^{\mathrm{T}}(t)(R_1+R_2)x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}_2w(t)+w^{\mathrm{T}}(t)\bar{B}_2^{\mathrm{T}}Px(t)\\
&\quad+x^{\mathrm{T}}(t-d(t))\bar{A}_1^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}_1x(t-d(t))\\
&\quad+x^{\mathrm{T}}(t-h(t))K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}_1Kx(t-h(t))\\
&\quad-(1-\dot{d}(t))x^{\mathrm{T}}(t-d(t))R_1x(t-d(t))\\
&\quad-(1-\dot{h}(t))x^{\mathrm{T}}(t-h(t))R_2x(t-h(t))
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

当 $w(t)=0$ 时，考虑到条件(5.3.2)，如果式(5.3.8)成立则闭环系统是鲁棒二次稳

定的，

$$\begin{aligned}&x^{\mathrm{T}}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}Px(t)\\&\quad+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}Kx(t)+x^{\mathrm{T}}(t)(R_1+R_2+\varepsilon I)x(t)\\&\quad+x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}_1x\left(t-d(t)\right)\\&\quad+x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}_1Kx\left(t-h(t)\right)\\&\quad-\left(1-\rho_d\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right)R_1x\left(t-d(t)\right)\\&\quad-\left(1-\rho_h\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)R_2x\left(t-h(t)\right)<0\end{aligned}\tag{5.3.8}$$

式(5.3.8)可以写为

$$\begin{bmatrix}x^{\mathrm{T}}(t) & x^{\mathrm{T}}\left(t-d(t)\right) & x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)\end{bmatrix}W\begin{bmatrix}x(t)\\x\left(t-d(t)\right)\\x\left(t-h(t)\right)\end{bmatrix}<0\tag{5.3.9}$$

其中

$$W=\begin{bmatrix}\bar{A}^{\mathrm{T}}P+P\bar{A}+K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}P+P\bar{B}K+R_1+R_2+\varepsilon I & P\bar{A}_1 & P\bar{B}_1K\\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0\\ K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\rho_h)R_2\end{bmatrix}\tag{5.3.10}$$

由式(5.3.4)显然有 $W<0$，即式(5.3.9)成立，即闭环系统是鲁棒二次稳定的。

同时，由(5.3.4)有

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}S_1 & P\bar{A} & P\bar{B}_1K & P\bar{B}_2\\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P & -\left(1-\rho_d\right)^{-1}R_1 & 0 & 0\\ K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -\left(1-\rho_h\right)^{-1}R_2 & 0\\ \bar{B}_2^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -\gamma^2I\end{bmatrix}\\&\quad+\begin{bmatrix}\bar{C}^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}\bar{D}^{\mathrm{T}}\\ \bar{C}_1^{\mathrm{T}}\\ K^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}}\\ \bar{B}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{C}+\bar{D}K & \bar{C}_1 & \bar{D}_1K & \bar{B}_3\end{bmatrix}<0\end{aligned}\tag{5.3.11}$$

因此，对任意的 $x(t)$ 、 $w(t)$ 有

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \\ x(t-h(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} S_1 & P\bar{A} & P\bar{B}_1K & P\bar{B}_2 \\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)^{-1}R_1 & 0 & 0 \\ K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\rho_h)^{-1}R_2 & 0 \\ \bar{B}_2^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \\ x(t-h(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \\ x(t-h(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \bar{C}^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}\bar{D}^{\mathrm{T}} \\ \bar{C}_1^{\mathrm{T}} \\ K^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}+\bar{D}K & \bar{C}_1 & \bar{D}_1K & \bar{B}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \\ x(t-h(t)) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \tag{5.3.12}$$

考虑到条件(5.3.2)，下式显然成立：

$$\dot{V}\left(x(t),w(t),t\right)+z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)<0,\quad t\geqslant 0 \tag{5.3.13}$$

由于系统是鲁棒二次稳定的，对任意 $w(t)\in L_2[0,\ +\infty)$，有 $x(t)\in L_2[0,\ +\infty)$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。对(5.3.13)两边积分，并注意到在零初始条件下 $V(x(t),w(t),t)=0$，以及 $V(x(+\infty),w(+\infty),+\infty)\geqslant 0$，我们有

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty}\left(z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\left(z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\quad +V\left(x(+\infty),w(+\infty),+\infty\right)+V\left(x(0),w(0),0\right) \\ &=\int_0^{+\infty}\left(\dot{V}\left(x(t),w(t),t\right)+z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\right)\mathrm{d}t<0 \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

即式(5.3.5)满足。证毕。

我们使用定理 5.3.1 的结论分别讨论具有参数有界不确定和具有凸多面体不确定的线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制问题。

5.3.2 具有范数有界不确定的线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

本节我们假设系统(5.3.1)具有如下形式的不确定参数：

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_1 & \Delta B & \Delta B_1 & \Delta B_2 \\ \Delta C & \Delta C_1 & \Delta D & \Delta D_1 & \Delta B_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}F(t)\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{bmatrix} \tag{5.3.15}$$

其中，H_1、H_2、E_1、E_2、E_3、E_4、E_5 是已知的具有适当维数的常数矩阵，它们反映了系统不确定性的结构，$F(t) \in R^{i \times j}$ 是一个具有 Legesgue 可测元的未知矩阵函数，且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I \tag{5.3.16}$$

其中，I 表示适当维数的单位矩阵。

定理 5.3.2 系统(5.3.1)、(5.3.15)是鲁棒 $H_\infty - \gamma$ 可镇定的当且仅当存在矩阵 $Y \in R^{m_1 \times n}$，对称正定矩阵 $X, Q_1, Q_2 \in R^{n \times n}$ 和标量 $\alpha > 0, \beta > 0$ 使得下式满足：

$$\begin{bmatrix} S & A_1 X & B_1 Y & B_2 & \Omega & XE_1^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}} E_3^{\mathrm{T}} & X \\ XA_1^{\mathrm{T}} & -(1-\rho_d)Q_1 & 0 & 0 & XC_1^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ Y^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -(1-\rho_h)Q_2 & 0 & Y^{\mathrm{T}} D_1^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}} E_4^{\mathrm{T}} & 0 \\ B_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I & B_3^{\mathrm{T}} & E_5^{\mathrm{T}} & 0 \\ \begin{matrix} CX + DY \\ +\alpha H_2 H_1^{\mathrm{T}} \end{matrix} & C_1 X & D_1 Y & B_3 & -I + \alpha H_2 H_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ E_1 X + E_3 Y & E_2 X & E_4 Y & E_5 & 0 & -\alpha I & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.3.17}$$

其中

$$S = XA^{\mathrm{T}} + AX + Y^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} + BY + Q_1 + Q_2 + \alpha H_1 H_1^{\mathrm{T}}$$

$$\Omega = XC^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} + \alpha H_1 H_2^{\mathrm{T}}$$

而且如果上式满足，则状态反馈控制器

$$u(t) = YX^{-1} x(t) \tag{5.3.18}$$

为一鲁棒 $H_\infty - \gamma$ 镇定控制器。

证明 给定正标量 $\gamma > 0$，由定义 5.3.1，系统(5.3.1)、(5.3.15)是鲁棒 $H_\infty - \gamma$ 可镇定当且仅当存在矩阵 $K \in R^{m \times n}$，对称正定矩阵 P, R_1，$R_2 \in R^{n \times n}$ 和一个标量 $\varepsilon > 0$ 使得对任意满足(5.3.16)的不确定性 $F(t)$，满足

$$W=\begin{bmatrix} S_1 & P\bar{A}_1 & P\bar{B}K & P\bar{B}_2 & \bar{C}^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}\bar{D}^{\mathrm{T}} \\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 & 0 & \bar{C}_1^{\mathrm{T}} \\ K^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}R & 0 & -(1-\rho_h)R_2 & 0 & K^{\mathrm{T}}\bar{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_2^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -\gamma^2 I & \bar{B}_3^{\mathrm{T}} \\ \bar{C}+\bar{D}K & \bar{C}_1 & \bar{D}_1K & \bar{B}_3 & -I \end{bmatrix}<0 \tag{5.3.19}$$

其中

$$S_1=\bar{A}^{\mathrm{T}}P+P\bar{A}+K^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}P+P\bar{B}K+R_1+R_2+\varepsilon I$$

显然，式(5.3.19)等价于对任意具有适当维数的非零向量ξ，下式满足：

$$\xi^{\mathrm{T}}W\xi=\xi^{\mathrm{T}}L\xi+\xi^{\mathrm{T}}\Delta L\xi<0 \tag{5.3.20}$$

其中标称项

$$L=\begin{bmatrix} S_1 & PA_1 & P\bar{B}_1K & PB_2 & C^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)R_1 & 0 & 0 & C_1^{\mathrm{T}} \\ K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}R & 0 & -(1-\rho_h)R_2 & 0 & K^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}} \\ B_2^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -\gamma^2 I & B_3^{\mathrm{T}} \\ C+DK & C_1 & D_1K & B_3 & -I \end{bmatrix} \tag{5.3.21}$$

不确定项

$$\Delta L=\begin{bmatrix} PH_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_2 \end{bmatrix}F(t)\begin{bmatrix} E_1+E_3K & E_2 & E_4K & E_5 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.22}$$

显然，当

$$F(t)=\frac{\begin{bmatrix} PH_1 & 0 & 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix}\xi\xi^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} E_1+E_3K & E_2 & E_4K & E_5 & 0 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} PH_1 & 0 & 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix}\xi\right\|\left\|\xi^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} E_1+E_3K & E_2 & E_4K & E_5 & 0 \end{bmatrix}\right\|} \tag{5.3.23}$$

时式(5.3.20)左边取最大值，这时需有

$$\xi^{\mathrm{T}}W\xi=\xi^{\mathrm{T}}L\xi+2\sqrt{\xi^{\mathrm{T}}L_1\xi\xi^{\mathrm{T}}L_2\xi}<0 \tag{5.3.24}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} PH_1H_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & PH_1H_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_2H_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & H_2H_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{5.3.25}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K & E_5 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K & E_5 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.26}$$

显然需有 $L<0$，且$\left(\xi^{\mathrm{T}}L\xi\right)^2 - 4\xi^{\mathrm{T}}L_1\xi\xi^{\mathrm{T}}L_2\xi > 0$。由引理 4.2.2，存在标量$\alpha>0$使得

$$L + \alpha L_1 + \frac{1}{\alpha}L_2 < 0 \tag{5.3.27}$$

另一方面由引理 4.2.3，对任意的标量$\alpha>0$，式(5.3.28)成立：

$$\xi^{\mathrm{T}}\Delta L\xi \leqslant \alpha\xi^{\mathrm{T}}L_1\xi + \frac{1}{\alpha}\xi^{\mathrm{T}}L_2\xi \tag{5.3.28}$$

即式(5.3.27)对条件(5.3.19)也是充分的。由 Schur 引理，式(5.3.27)等价于

$$\begin{bmatrix} S_2 & PA_1 & B_1K & B_2P & \Xi & E_1^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & X \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -(1-\rho_d)Q_1 & 0 & 0 & C_1^{\mathrm{T}} & E_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -(1-\rho_h)Q_2 & 0 & K^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}} & K^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}} & 0 \\ PB_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I & B_3^{\mathrm{T}} & E_5^{\mathrm{T}} & 0 \\ \begin{matrix} C+DK \\ +\alpha H_2H_1^{\mathrm{T}}P \end{matrix} & C_1 & D_1K & B_3 & -I+\alpha H_2H_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ E_1 + E_3Y & E_2 & E_4K & E_5 & 0 & -\alpha I & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.3.29}$$

其中，$\Xi = C^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} + \alpha PH_1H_2^{\mathrm{T}}$。

引入矩阵 $X = P^{-1}$，$Q_1 = XR_1X$，$Q_2 = XR_2X$，$\beta = \varepsilon^{-1}$，并记$K = YX^{-1}$，其中Y为具有适当维数的任意矩阵，Q_1 和 Q_2 为具有适当维数的对称正定矩阵。在式(5.3.29)左边的左右两边同乘以

$$\begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

则式(5.3.29)等价于式(5.3.17)。证毕。

注 5.3.1　通过求解以下的凸规划问题，可以求得闭环系统最优的 H_∞ 性能指标 γ^* 以及相应的鲁棒 $H_\infty - \gamma$ 控制器。

$$最小化 \quad \gamma^2$$

$$约束：\ X > 0,\ Q_1 > 0,\ Q_2 > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \ 和式(5.3.17)$$

注 5.3.2　上述鲁棒 $H_\infty - \gamma$ 镇定控制器设计问题以及鲁棒 H_∞ 性能指标最优化控制器设计问题都可以通过相关的 LMI 求解软件系统地求解。

例 5.3.1　考虑具有如下参数的线性不确定时滞系统：

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = &\begin{bmatrix} -1+0.5r_1(t) & 1 \\ 3 & 2+0.6r_2(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0.5r_3(t) & 0.4r_3(t) \end{bmatrix} x\big(t-d(t)\big) \\
&+ \begin{bmatrix} 5+r_4(t) \\ 3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3+0.5r_5(t) \end{bmatrix} u\big(t-h(t)\big) + \begin{bmatrix} 0.5+r_5(t) \\ 0.3+r_5(t) \end{bmatrix} w(t) \\
z(t) = &\big[1+0.25r_6(t) \quad 1+0.24r_6(t)\big] x(t) \\
&+ \big[0.3+0.25r_6(t) \quad 0.5+0.2r_6(t)\big] x\big(t-d(t)\big) + \big(0.5+0.5r_7(t)\big) u(t) \\
&+ \big(0.5+0.2r_7(t)\big) u\big(t-h(t)\big) + \big(0.5+0.9r_8(t)\big) w(t)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&r_1(t) = r_2(t) = r_3(t) = r_4(t) = r_5(t) = r_6(t) = r_7(t) = r_8(t) = \sin(t) \\
&d(t) = 0.3 + 0.3\sin(t), \quad h(t) = 0.2 + 0.2\cos(t)
\end{aligned}$$

为了使用定理 5.3.2，我们把上述不确定性表示为范数有界型(5.3.15)

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad E_4=\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix},\quad E_5=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ F(t)=\begin{bmatrix}\sin(t) & 0\\0 & \sin(t)\end{bmatrix}$$

这里要特别指出的是 $F(t)=\begin{bmatrix}\sin(t) & 0\\0 & \sin(t)\end{bmatrix}$满足条件(5.3.16)，但显然这只是 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$ 的一种特殊的情况，这种不确定模型描述会带来一定的保守性，也就是说定理 5.3.2 只是给出了该系统鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 可镇定的一个充分条件。

令 $\gamma=3$，求解线性矩阵不等式(5.3.17)，可得

$$X=\begin{bmatrix}2.5898 & -1.3710\\-1.3710 & 1.0166\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-2.5740 & -0.6124\end{bmatrix}$$

线性状态反馈控制器为

$$u(t)=Kx(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-4.5890 & -6.7911\end{bmatrix}x(t)$$

令 $\gamma=2$，求解现形矩阵不等式(5.3.17)，可得

$$X=\begin{bmatrix}2.5554 & -1.4970\\-1.4970 & 1.1490\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-2.2727 & -0.5842\end{bmatrix}$$

线性状态反馈控制器为

$$u(t)=Kx(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-5.0132 & -7.0396\end{bmatrix}x(t)$$

通过求解注 5.3.1 中的凸规划问题可得该系统鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 性能的一个次优解 $\gamma^*=1.52$ 及相应解为

$$X=\begin{bmatrix}1.4988 & -1.0728\\-1.0728 & 0.8445\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-1.4841 & -0.5979\end{bmatrix}$$

对应的次优线性状态反馈控制器为

$$u(t)=Kx(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-16.4950 & -21.6620\end{bmatrix}x(t)$$

5.3.3 具有凸多面体不确定的线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

本节我们假设系统(5.3.1)具有如下形式的不确定参数：

$$
\begin{aligned}
&\Delta A=\left\{\sum_{i_1=1}^{k_1}\alpha_{i_1}E_{i_1}\left|\sum_{i_1=1}^{k_1}\alpha_{i_1}=1,\alpha_{i_1}\geqslant 0\right.\right\}, \quad \Delta A_1=\left\{\sum_{i_2=1}^{k_2}\beta_{i_2}F_{i_2}\left|\sum_{i_2=1}^{k_2}\beta_{i_2}=1,\beta_{i_2}\geqslant 0\right.\right\}\\
&\Delta B=\left\{\sum_{i_3=1}^{k_3}\gamma_{i_3}G_{i_3}\left|\sum_{i_3=1}^{k_3}\gamma_{i_3}=1,\gamma_{i_3}\geqslant 0\right.\right\}, \quad \Delta B_1=\left\{\sum_{i_4=1}^{k_4}\eta_{i_4}H_{i_4}\left|\sum_{i_4=1}^{k_4}\eta_{i_4}=1,\eta_{i_4}\geqslant 0\right.\right\}\\
&\Delta C=\left\{\sum_{i_5=1}^{k_5}\delta_{i_5}I_{i_5}\left|\sum_{i_5=1}^{k_5}\delta_{i_5}=1,\delta_{i_5}\geqslant 0\right.\right\}, \quad \Delta C_1=\left\{\sum_{i_6=1}^{k_6}\varepsilon_{i_6}J_{i_6}\left|\sum_{i_6=1}^{k_6}\varepsilon_{i_6}=1,\varepsilon_{i_6}\geqslant 0\right.\right\} \qquad (5.3.30)\\
&\Delta D=\left\{\sum_{i_7=1}^{k_7}\mu_{i_5}K_{i_5}\left|\sum_{i_7=1}^{k_7}\mu_{i_7}=1,\mu_{i_7}\geqslant 0\right.\right\}, \quad \Delta D_1=\left\{\sum_{i_8=1}^{k_8}\sigma_{i_8}L_{i_8}\left|\sum_{i_8=1}^{k_8}\sigma_{i_8}=1,\sigma_{i_8}\geqslant 0\right.\right\}\\
&\Delta B_2=\left\{\sum_{i_9=1}^{k_9}\omega_{i_3}M_{i_3}\left|\sum_{i_9=1}^{k_9}\omega_{i_9}=1,\omega_{i_9}\geqslant 0\right.\right\}, \quad \Delta B_3=\left\{\sum_{i_9=1}^{k_9}\tau_{i_4}N_{i_4}\left|\sum_{i_9=1}^{k_9}\tau_{i_4}=1,\tau_{i_9}\geqslant 0\right.\right\}
\end{aligned}
$$

其中，E_i、F_i、G_i、H_i、I_i、J_i、M_i、N_i为具有适当维数的已知实矩阵，α_i、β_i、γ_i、η_i、δ_i、ε_i、μ_i、σ_i、ω_i、τ_i是未知的有界实标量函数。

很显然，由式(5.3.30)表示的不确定参数是有界的，从几何上看，它们是一系列凸多面体。不确定参数α_i、β_i、γ_i、η_i、δ_i、ε_i、μ_i、σ_i、ω_i、τ_i可以是时变的，它们也能显示出写成依赖时间t的形式，例如，ΔA能写成

$$
\Delta A(t)=\left\{\sum_{i_1=1}^{k_1}\alpha_{i_1}(t)E_{i_1}\left|\sum_{i_1=1}^{k_1}\alpha_{i_1}(t)=1,\alpha_{i_1}(t)\geqslant 0\right.\right\}
$$

本节的主要结果由下面的定理给出：

定理 5.3.3　系统(5.3.1)、(5.3.30)是鲁棒$H_\infty-\gamma$可镇定的当且仅当存在矩阵$Y\in R^{m_1\times n}$，对称正定矩阵$X,\ Q_1,\ Q_2\in R^{n\times n}$和标量$\beta>0$使得下式满足：

$$
\begin{bmatrix}
S & \tilde{A}_1X & \tilde{B}_1Y & \tilde{B}_2 & X\tilde{C}^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}\tilde{D}^{\mathrm{T}} & X\\
X\tilde{A}_1^{\mathrm{T}} & -(1-\rho_d)Q_1 & 0 & 0 & X\tilde{C}_1^{\mathrm{T}} & 0\\
Y^{\mathrm{T}}\tilde{B}_1^{\mathrm{T}} & 0 & -(1-\rho_h)Q_2 & 0 & Y^{\mathrm{T}}\tilde{D}_1^{\mathrm{T}} & 0\\
\tilde{B}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2I & \tilde{B}_3^{\mathrm{T}} & 0\\
\tilde{C}X+\tilde{D}Y & \tilde{C}_1X & \tilde{D}_1Y & \tilde{B}_3 & -I & 0\\
X & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta I
\end{bmatrix}<0 \qquad (5.3.31)
$$

其中

$$
S=X\tilde{A}^{\mathrm{T}}+\tilde{A}X+Y^{\mathrm{T}}\tilde{B}^{\mathrm{T}}+\tilde{B}Y+Q_1+Q_2
$$

且

$$\tilde{A}=\left(A+E_{i_1}\right),\quad \tilde{A}_1=\left(A+F_{i_2}\right),\quad \tilde{B}=\left(B+G_{i_3}\right),\quad \tilde{B}_1=\left(B_1+H_{i_4}\right),\quad \tilde{B}_2=\left(B_2+M_{i_9}\right)$$

$$\tilde{C}=\left(C+I_{i_5}\right),\quad \tilde{C}_1=\left(C_1+J_{i_6}\right),\quad D=\left(D+K_{i_7}\right),\quad \tilde{D}_1=\left(D_1+L_{i_8}\right),\ \tilde{B}_3=\left(B_3+N_{i_{10}}\right)$$

$$\begin{aligned}(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7,i_8,i_9,i_{10})\in\{1,\cdots,k_1\}\times\{1,\cdots,k_2\}\times\{1,\cdots,k_3\}\times\{1,\cdots,k_4\}\\ \times\{1,\cdots,k_5\}\times\{1,\cdots,k_6\}\times\{1,\cdots,k_7\}\times\{1,\cdots,k_8\}\times\{1,\cdots,k_9\}\times\{1,\cdots,k_{10}\}\end{aligned}$$

如果上面的一系列不等式满足，则

$$u(t)=YX^{-1}x(t) \tag{5.3.32}$$

为一鲁棒控制器 $H_\infty-\gamma$ 镇定控制器。其证明过程同定理 4.4.1 类似，关键是证明不确定项对 Lyapunov 函数小于零这个不等式的凸性。

同样可以通过如下的凸规划问题来求解最优化鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 指标及其相应的控制器：

$$\text{最小化}\ \gamma^2$$

$$\text{约束：}\ X>0,\ Q_1>0,\ Q_2>0,\ \beta>0\text{，及式(5.3.31)}$$

例 5.3.2　把例 5.3.1 中不确定性描述为如下的凸多面体型：

$$E_1=-E_2=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.6\end{bmatrix},\quad F_1=-F_2=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.4\end{bmatrix},\quad G_1=-G_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$H_1=-H_2=\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix},\quad I_1=-I_2=\begin{bmatrix}0.25\\0.24\end{bmatrix},\quad J_1=-J_2=\begin{bmatrix}0.25\\0.20\end{bmatrix},\quad M_1=-M_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$N_1=-N_2=0.9,\quad K_1=-K_2=0.5,\quad L_1=-L_2=0.2$$

$$\begin{aligned}\alpha_1(t)=\beta_1(t)=\gamma_1(t)=\eta_1(t)=\delta_1(t)=\varepsilon_1(t)\\ =\mu_1(t)=\sigma_1(t)=\tau_1(t)=\omega_1(t)=\frac{1-\sin(t)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2(t)=\beta_2(t)=\gamma_2(t)=\eta_2(t)=\delta_2(t)=\varepsilon_2(t)\\ =\mu_2(t)=\sigma_2(t)=\tau_2(t)=\omega_2(t)=\frac{1-\sin(t)}{2}\end{aligned}$$

由于在凸多面体不确定性模型中，假定其每个不确定参数都是在一个凸多面

体中独立变化的。同样变换后的凸多面体不确定模型与原系统实际上不是等价的，原系统的不确定性只能作为由变换后的凸多面体不确定模型所描述凸多面体不确定集合的一个子集，定理 5.3.3 也只能作为原系统鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 可镇定的一个充分条件。同时，当系统模型矩阵的两个或几个不确定项相等时，没有必要对这些不确定项的顶点作组合，这不但可以减少计算量，而且也减小了保守性。例如，本例中的情况，如果对所有不确定项的顶点作组合，那将会得到 2^{10} 个联立的线性矩阵不等式，计算量非常大，而且会带来很大的保守性，由于系统的不确定项有

$$\alpha_i=\beta_i=\gamma_i=\eta_i=\delta_i=\varepsilon_i=\mu_i=\sigma_i=\tau_i=\omega_i,\quad i=1,2$$

因此只要联立两个线性矩阵不等式就可以了，两个线性矩阵不等式分别同时取各不确定项的两个顶点值。这样不但计算量大大减少，而且给出了系统该鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 可镇定的一个充分必要条件。下面的计算都采用此方法。

令 $\gamma=3$，求解线性矩阵不等式(5.3.31)，可得

$$X=\begin{bmatrix}6.2928 & -2.6462\\ -2.6462 & 2.5100\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-1.9057 & -0.9048\end{bmatrix}$$

线性状态反馈控制器为

$$u(t)=Kx(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-3.1181 & -3.6717\end{bmatrix}x(t)$$

令 $\gamma=2$，求解线性矩阵不等式(5.3.31)，可得

$$X=\begin{bmatrix}6.2928 & -4.6220\\ -4.6220 & 3.9234\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-3.2986 & -0.2682\end{bmatrix}$$

线性状态反馈控制器为

$$u(t)=Kx(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-4.2639 & -5.0936\end{bmatrix}x(t)$$

通过求解注 5.3.2 中的凸规划问题可得该系统鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 性能的一个最优解 $\gamma^*=1.48$ 及相应的

$$X=\begin{bmatrix}1.5603 & -1.2581\\ -1.2581 & 1.0195\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-1.2609 & -0.6222\end{bmatrix}$$

对应的次优线性状态反馈控制器为

$$u(t)=Kx(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-259.6943 & -321.0877\end{bmatrix}x(t)$$

由凸多面体不确定参数模型所求得的最优鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 性能 $\gamma^*=1.48$ 要略小于由范数有界不确定模型所求得的次优鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 性能 $\gamma^*=1.52$，如前所述，这是由于范数有界不确定模型建模的保守性引起的。

5.4 不确定线性时滞系统的时滞依赖最优保成本控制

针对不确定时滞系统(5.2.1)~(5.2.5)，考虑如下的二次型性能指标：

$$J=\int_0^\infty\left[x^{\mathrm T}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm T}(t)R_2u(t)\right]\mathrm dt \tag{5.4.1}$$

其中 $R_1>0$ 和 $R_2>0$ 为对称正定的性能指标函数。

定义 5.4.1 如果存在一个标量 V 和控制律使得对任意满足(5.2.5)的不确定参数，系统的闭环性能指标满足

$$J=\int_0^\infty\left[x^{\mathrm T}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm T}(t)R_2u(t)\right]\mathrm dt\leqslant V \tag{5.4.2}$$

则称 V 为保成本，$u(t)$ 为保成本控制律。

首先我们对 Razumikhin 定理作一下扩充，同时也将构造出闭环系统的一个保成本函数。

定理 5.4.1 对任意的 RFDE(泛函微分方程)，如果存在一个具有连续导数的标量函数 $V(x(t))$, $V(0)=0$，以及一个连续的非减函数 $p(s)>0,\ s>0$ 使得

(1) $V(x(t))>0$ 对任意的 $x\neq 0$；

(2) $V(x(t))\to\infty$ 当 $\|x\|\to\infty$；

(3) 如果对任意的 $\theta\in[-\tau,\ 0]$，满足 $V(x(t+\theta))<p(V(x(t)))$ 则有

$$x^{\mathrm T}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm T}(t)R_2u(t)+\dot V(x(t),t)\leqslant-\omega\|x(t)\|^2$$

其中，$\omega>0$。

那么，闭环系统是大范围渐进稳定的，$V(x(0))$ 是一个保成本，其中 $x(0)=\phi(0)\in R^n$ 是系统的初始条件；$u(t)$ 是一个保成本控制律。

证明 由条件(3)，显然如果由 $V(x(t+\theta))<p(V(x(t)))$ 对任意 $\theta\in[-\tau,0]$ 成立，则

$$\begin{aligned}\dot V(x(t))&\leqslant-\omega\|x(t)\|^2-x^{\mathrm T}(t)R_1x(t)-u^{\mathrm T}(t)R_2u(t)\\&\leqslant-\omega\|x(t)\|^2\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

考虑到条件(1)、(2)，由 Razumikhin 定理，闭环系统是渐进稳定的。

对(5.4.3)从 0 到 ∞ 积分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\dot{V}(x(t))\mathrm{d}t &= V(x(\infty))-V(x(0))\\ &\leqslant -\int_0^{\infty}\left(x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)\right)\mathrm{d}t-\int_0^{\infty}\omega\left\|x(t)\right\|^2\mathrm{d}t\\ &\leqslant -\int_0^{\infty}\left(x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

由于闭环系统是渐进稳定的，有 $x(\infty)\to 0$，因此我们可得

$$\int_0^{\infty}\left(x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)\right)\mathrm{d}t\leqslant V(x(0)) \tag{5.4.5}$$

本节主要考虑无记忆状态反馈保成本控制器的设计问题，以及如何选择一个在使得由给出的保成本最小化意义下的最优控制器。

定理 5.4.2　针对不确定线性时滞系统(5.2.1)，给定标量 τ 满足(5.2.2)，如果存在对称正定矩阵 X、P_1、P_2 以及正标量 $\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \varepsilon_1>0$，满足如下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} S & X & Y^{\mathrm{T}} & M_1 & M_2\\ X & -R_1^{-1} & 0 & 0 & 0\\ Y & 0 & -R_2^{-1} & 0 & 0\\ M_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -N_1 & 0\\ M_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -N_2 \end{bmatrix}<0 \tag{5.4.6a}$$

$$\begin{bmatrix} X & XA^{\mathrm{T}} & XE_1^{\mathrm{T}}\\ AX & P_1-\beta_1H_1H_1^{\mathrm{T}} & 0\\ E_1X & 0 & \beta_1 \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{5.4.6b}$$

$$\begin{bmatrix} X & XA_1^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}}\\ A_1X & P_2-\beta_2H_2H_2^{\mathrm{T}} & 0\\ E_2X & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{5.4.6c}$$

其中

$$S = AX + XA^{\mathrm{T}} + A_1X + XA_1^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i H_i H_i^{\mathrm{T}} + \tau\varepsilon_1 H_2 H_2^{\mathrm{T}} + \tau A_1(P_1 + P_2)A_1^{\mathrm{T}} + 2\tau X$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} XE_1^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \mathrm{diag}\{\alpha_1 I,\ \alpha_2 I\}$$

$$M_2 = \tau A_1(P_1 + P_2)E_2^{\mathrm{T}}, \quad N_2 = \tau\left[\varepsilon I - E_2(P_1 + P_2)E_2^{\mathrm{T}}\right]$$

那么在控制律

$$u(t) = YX^{-1}x(t) \tag{5.4.7}$$

的作用下闭环系统鲁棒稳定，而且 $x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)$ 是闭环系统的一个保成本，其中 $x(0) = \phi(0) \in R^n$ 是系统的初始条件，控制律 $u(t) = YX^{-1}x(t)$ 是一个状态反馈保成本控制律。

证明 为了符号描述方便，记

$$A(t) = A + \Delta A, \quad A_1(t) = A_1 + \Delta A_1, \quad B(t) = B + \Delta B, \quad \overline{A}(t) = A(t) + B(t)K$$

则引入控制器 $u(t) = Kx(t)$ 后得闭环系统可以看成如下系统的一个特例：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[\overline{A}(t) + A_1(t)\right]x(t) \\ &\quad - \int_{-d(t)}^{0} A_1(t)\left[\overline{A}(t+\theta)x(t+\theta) + A_1(t+\theta)x(t-d(t)+\theta)\right]\mathrm{d}\theta \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-2\tau,\ 0] \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

如果 V 是系统的一个保成本，$u(t) = Kx(t)$ 是一个状态反馈保成本控制律，则同样对原系统也成立。

考虑如下的 Lyapunov 函数：

$$V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \tag{5.4.9}$$

则有

$$\dot{V}(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)\left\{\left[\overline{A}(t) + A_1(t)\right]^{\mathrm{T}}P + P\left[\overline{A}(t) + A_1(t)\right]\right\}x(t) + L(x(t),t) \tag{5.4.10}$$

其中

$$L(x(t),t) = -2x^{\mathrm{T}}(t)P\int_{-d(t)}^{0} A_1(t)\left[\overline{A}(t+\theta)x(t+\theta) + A_1(t+\theta)x(t-d(t)+\theta)\right]\mathrm{d}\theta$$

假设存在对称正定矩阵 P_1，P_2 和标量 $\varepsilon_1 > 0$ 满足

$$\varepsilon_1 I - E_2(P_1 + P_2)E_2^{\mathrm{T}} > 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{5.4.11}$$

假设存在标量 $\beta_i > 0(i = 1,2)$ 使得下面的不等式成立：

$$A^{\mathrm{T}}(P_1 - \beta_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}})^{-1} A + \beta_1^{-1}(E_1 + E_3 K)^{\mathrm{T}}(E_1 + E_3 K) \leqslant P \tag{5.4.12}$$

$$A_1^{\mathrm{T}}\left(P_2 - \beta_2 H_2 H_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1} A_1 + \beta_2^{-1} E_2^{\mathrm{T}} E_2 \leqslant P \tag{5.4.13}$$

且有

$$P_1 - \beta_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} > 0 \tag{5.4.14}$$

$$P_2 - \beta_2 H_2 H_2^{\mathrm{T}} > 0 \tag{5.4.15}$$

则应用引理 4.3.1，引理 4.3.2，引理 4.3.3 和引理 4.3.4，我们有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t),t) \leqslant\, & (A + A_1 + BK)^{\mathrm{T}} P + P(A + A_1 + BK) + \alpha_1 P H_1 H_1^{\mathrm{T}} P + \alpha_2 P H_2 H_2^{\mathrm{T}} P \\ & + \frac{1}{\alpha_1}(E_1 + E_3 K)^{\mathrm{T}}(E_1 + E_3 K) + \frac{1}{\alpha_2} E_2^{\mathrm{T}} E_2 \\ & + \tau x^{\mathrm{T}}(t) P A_1(t) P_1 A_1^{\mathrm{T}}(t) P x(t) + \int_{-d(t)}^{0} x^{\mathrm{T}}(t+\theta) P x(t+\theta) \mathrm{d}\theta \\ & + \tau x^{\mathrm{T}}(t) P A_1(t) P_2 A_1^{\mathrm{T}}(t) P x(t) \\ & + \int_{-d(t)}^{0} x^{\mathrm{T}}(t - d(t) + \theta) P x(t - d(t) + \theta) \mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

为应用定理 5.4.1，假设存在常数 $q > 1$，使得下面的不等式满足：

$$V(z(s),s) \leqslant qV(z(t),t), \quad t - 2\tau \leqslant s \leqslant t \tag{5.4.17}$$

结合式(5.4.16)和式(5.4.17)，我们可得

$$x^{\mathrm{T}}(t) R_1 x(t) + u^{\mathrm{T}}(t) R_2 u(t) + \dot{V}(x(t),t) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t) W_2 x(t) \tag{5.4.18}$$

其中

$$\begin{aligned} W_2 = & (A + A_1 + BK)^{\mathrm{T}} P + P(A + A_1 + BK) + \alpha_1 P H_1 H_1^{\mathrm{T}} P + \alpha_2 P H_2 H_2^{\mathrm{T}} P \\ & + \frac{1}{\alpha_1}(E_1 + E_3 K)^{\mathrm{T}}(E_1 + E_3 K) + \frac{1}{\alpha_2} E_2^{\mathrm{T}} E_2 + 2q\tau P + R_1 + K^{\mathrm{T}} R_2 K \end{aligned}$$

$$+\tau P\left[A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1 H_2 H_2^{\mathrm{T}}\right]P$$
$$+\tau PA_1(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\left[\varepsilon_1 I-E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\right]^{-1}E_2(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}P$$

引入矩阵 $X=P^{-1}$，$K=YX^{-1}$，$W_3=XW_2X$，并令 $W=W_3$，$q=1$。显然，W_3 对 q 和 τ 都是单调增的，因此给定标量 $\tau>0$，如果存在对称正定矩阵 X，P_1，P_2 和标量 $\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \varepsilon_2>0$，满足不等式(5.4.11)~(5.4.15)以及 $W<0$，则存在一个足够小的 $q>1$ 使得 $W_3<0$，也即

$$x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)+\dot{V}(x(t),t)\leqslant-\omega\|x(t)\|^2 \tag{5.4.19}$$

其中，$\omega=\lambda_{\max}(W_2)>0$。

由定理 5.4.1，系统是鲁棒稳定的，而且 $x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)$ 是闭环系统的一个保成本，状态反馈控制器 $u(t)=YX^{-1}x(t)$ 是一个保成本控制器。

由 Schur 引理，$W<0$ 以及不等式(5.4.11)~(5.4.15)等价于线性矩阵不等式(5.4.6)。证毕。

注意到(5.4.5)式给出的成本上界跟系统的初始条件 $x(0)$ 有关，如果系统的初始条件未知，但为满足 $E\left\{x^{\mathrm{T}}(0)x(0)\right\}=1$ 的一个随机变量，则系统的二次型性能指标的期望满足

$$\bar{J}=E\{J\}\leqslant E\left\{x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)\right\}=\mathrm{tr}(X^{-1}) \tag{5.4.20}$$

定理 5.4.2 给出了设计一个状态反馈保成本控制律的方法。由于目标函数与决策变量之间是非线性关系，不能直接应用有关 LMI 工具箱中的优化工具，下面的定理 5.4.3 将寻求最优的状态反馈控制器使得保成本 $x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)$ 和 $\mathrm{tr}(X^{-1})$ 最小的问题转化成为另外的优化问题，其目标函数和决策变量之间是线性关系，可以用 LMI 工具箱直接求解。

定理 5.4.3 在线性矩阵不等式(5.4.6)约束下，最小化 $x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)$ 等价于在约束(5.4.6)以及(5.4.21)下最小化 r

$$\begin{bmatrix}-r & x_0^{\mathrm{T}}\\ x_0 & -X\end{bmatrix}\leqslant 0 \tag{5.4.21}$$

证明 假设 $x^{\mathrm{T}}(0)\hat{X}^{-1}x(0)$ 是前一问题的优化结果，而 $\hat{r}$ 是在约束(5.4.6)和(5.4.22)下最小 r 的结果

$$x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)\leqslant r \tag{5.4.22}$$

如果 $x^{\mathrm{T}}(0)\hat{X}^{-1}x(0)<\hat{r}$，那肯定存在一个标量 ε 满足 $0<\varepsilon<\hat{r}-x^{\mathrm{T}}(t)X^{-1}x(t)$ 并使得 $r^{*}=\hat{r}-\varepsilon<\hat{r}$，而 X 和 r^{*} 都满足(5.4.6)以及(5.4.22)，这和 $\hat{r}$ 下面最小化 r 的结果矛盾。因此必有 $x^{\mathrm{T}}(0)\hat{X}^{-1}x(0)=\hat{r}$，即在线性矩阵不等式(5.4.6)约束下最小化 $x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)$ 等价于在约束(5.4.6)以及(5.4.22)下最小化 r。

由 Schur 引理，不等式(5.4.22)等价于线性矩阵不等式(5.4.21)。证毕。

基于定理 5.4.2，通过求解问题 5.4.1 可以得到最小化保成本 $x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)$ 的最优控制器。

问题 5.4.1

$$\text{最小化 } r$$

$$\text{约束：} X>0,\ P_1>0,\ P_2>0$$

$$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \varepsilon_1>0 \text{ 及式(5.4.6)}$$

该凸优化能给出一个全局最优解。

定理 5.4.4　在约束(5.4.6)下最小化 $\mathrm{tr}(X^{-1})$ 等价于在约束(5.4.6)和(5.4.23)最小化 $\mathrm{tr}(S)$

$$\begin{bmatrix} -S & I \\ I & -X \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{5.4.23}$$

证明　假设 $\mathrm{tr}(\hat{X}^{-1})$ 是在约束(5.4.6)下最小化 $\mathrm{tr}(X^{-1})$ 的结果，$\mathrm{tr}(\hat{S})$ 是在约束(5.4.23)以及矩阵不等式(5.4.24)下最小化 $\mathrm{tr}(S)$ 的结果

$$X^{-1} \leqslant S \tag{5.4.24}$$

如果 $\mathrm{tr}(X^{-1})<\mathrm{tr}(S)$，则由(5.4.24)存在一个标量 ε 满足 $0<\varepsilon<\lambda_{\min}(\hat{S}-\hat{X}^{-1})$ 且使得 $\mathrm{tr}(S^{*})<\mathrm{tr}(\hat{S}-\varepsilon I)$，$X$ 和 S^{*} 满足式(5.4.6)和式(5.4.24)。这跟 $\mathrm{tr}(\hat{S})$ 是在约束(5.4.6)以及矩阵不等式(5.4.24)下最小化 $\mathrm{tr}(S)$ 的结果矛盾，因此必有 $\mathrm{tr}(S^{*})=\mathrm{tr}(S)$，即在约束(5.4.6)下最小化 $\mathrm{tr}(X^{-1})$ 等价于在约束(5.4.6)和(5.4.24)下最小化 $\mathrm{tr}(S)$。

由 Schur 引理，不等式(5.4.24)等价于线性矩阵不等式(5.4.23)。证毕。

基于定理 5.4.3，通过求解问题 5.4.2 可以得到最小化保成本 $\mathrm{tr}(X^{-1})$ 的最优控制器。

问题 5.4.2

$$\text{最小化 } \mathrm{tr}(S)$$

$$\text{约束：}\ X>0,\ P_1>0,\ P_2>0$$

$$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \varepsilon_1>0\ \text{及式(5.4.24)}$$

同样该凸规划问题能给出一个全局最优解

例 5.4.1　考虑具有如下参数的线性不确定时滞系统：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix},\quad \tau=2$$

$$H_1=H_2=H_3=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.1\end{bmatrix},\quad E_1=E_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\end{bmatrix},\quad E_3=1$$

$$R_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad R_2=1,\quad \phi(t)=\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

问题 5.4.1 的解如下：

$$X=\begin{bmatrix}2.9948 & -1.4487\\ -1.4487 & 3.7485\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-1.8661 & -0.8167\end{bmatrix}$$

$x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)$ 的最小值是 4.2269，最优的保成本控制器为

$$u(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-0.6368 & -0.0282\end{bmatrix}x(t)$$

问题 5.4.2 的解如下：

$$X=\begin{bmatrix}3.3180 & -2.0595\\ -2.0595 & 4.6182\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-2.0686 & 1.1032\end{bmatrix}$$

$\mathrm{tr}(X^{-1})$ 的最小值是 0.7168，最优的保成本控制器为

$$u(t)=YX^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-0.6571 & -0.0542\end{bmatrix}x(t)$$

5.5　具有范数有界不确定性的离散时滞系统的保成本控制

对应于 4.6 节，本节单独考虑具有范数有界不确定性的离散时滞系统的保成本控制。

考虑如下的不确定离散时滞系统：

$$\begin{aligned} &x(k+1)=(A+\Delta A(k))x(k)+(A_d+\Delta A_d)x(k-h)+(B+\Delta B)u(k) \\ &x(t)=\phi(k), \quad -h \leqslant k \leqslant 0 \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

其中，$x(k)\in R^n$ 为状态变量，$u(k)\in R^m$ 为系统输入变量，$h>0$ 为整数时滞，A、A_d、B 为已知的定常矩阵。$\Delta A(k)$、ΔA_d、ΔB 为时变函数，表示系统的不确定性，并满足

$$\begin{bmatrix}\Delta A & \Delta B\end{bmatrix}=E_1F_1(k)\begin{bmatrix}H_1 & H_3\end{bmatrix}, \quad \Delta A_d=E_2F_2(k)H_2 \tag{5.5.2}$$

其中，E_i、$H_j\ (i=1,2,\ j=1,2,3)$ 为已知的具有适当的定常矩阵，不确定矩阵 $F_i(t)$ 满足如下的范数有界条件：

$$F_i^{\mathrm T}(t)F_i(t)\leqslant I, \quad i=1,2 \tag{5.5.3}$$

对于系统(5.5.1)，我们给出如下的二次成本函数：

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}x^{\mathrm T}(k)Qx(k)+u^{\mathrm T}(k)Ru(k) \tag{5.5.4}$$

其中，Q、R 为正定对称矩阵。

我们首先研究 $u(k)\equiv 0$ 的情形。

定理 5.5.1 如果存在对称正定矩阵 P_1、S_1、S_2，矩阵 P_2、P_3、W_1、W_2、W_3、M_1、M_2 及其标量 $\alpha_1>0,\ \alpha_2>0$ 使得如下的线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & P_2^{\mathrm T}A_d-M_1 & P_2^{\mathrm T}E_1 & P_2^{\mathrm T}E_2 \\ * & \Omega_{22} & P_2^{\mathrm T}A_d-M_2 & P_3^{\mathrm T}E_2 & P_3^{\mathrm T}E_2 \\ * & * & -S_2+\alpha_2H_2^{\mathrm T}H_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha_2 I \end{bmatrix}<0 \tag{5.5.5a}$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 & M_1 \\ W_2^{\mathrm T} & W_3 & M_2 \\ M_1^{\mathrm T} & M_2^{\mathrm T} & S_1 \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{5.5.5b}$$

其中

$$\Omega_{11}=P_2^{\mathrm T}(A-I)+(A^{\mathrm T}-I)P_2+hW_1+M_1+M_1^{\mathrm T}+\alpha_1H_1^{\mathrm T}H_1+S_2+Q$$

$$\Omega_{12}=P_1-P_2^{\mathrm T}+(A^{\mathrm T}-I)P_3+hW_2+M_2^{\mathrm T}$$

$$\Omega_{22} = -P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + P_1 + hW_3 + hS_1$$

则对于所有的满足(5.5.3)的不确定性，系统(5.5.1)是鲁棒稳定的，同时成本函数满足

$$J \leqslant J_0 = x^{\mathrm{T}}(0)P_1x(0) + \sum_{\theta=-h}^{-1} x^{\mathrm{T}}(\theta)S_2x(\theta) + \sum_{\theta=-h+1}^{0}\sum_{s=-1+\theta}^{-1} y^{\mathrm{T}}(s)S_1y(s)$$

其中，$y(\theta) = x(\theta+1) - x(\theta)$。

证明 定义

$$x(k+1) = x(k) + y(k) \tag{5.5.6}$$

同时为了符号描述的方便，记

$$A(k) = A + \Delta A(k), \quad A_d(k) = A_d + \Delta A_d(k)$$

则有

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + A_d(k)x(k-d) \\ &= (A(k) + A_d(k))x(k) - A_d(k)\sum_{\theta=k-h}^{k}(x(\theta+1) - x(\theta)) \\ &= (A(k) + A_d(k))x(k) - A_d(k)\sum_{\theta=k-h}^{k} y(\theta) \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

很显然，式(5.5.7)等价于

$$0 = (A(k) + A_d(k) - I)x(k) - y(k) - A_d(k)\sum_{\theta=k-h}^{k-1} y(\theta) \tag{5.5.8}$$

显然，系统(5.5.1)等价于奇异系统(5.5.6)和(5.5.8)。我们给定如下的 Lyapunov 函数：

$$V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)P_1x(k) + \sum_{\theta=k-h}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(\theta)S_2x(\theta) + \sum_{\theta=-h+1}^{0}\sum_{s=k-1+\theta}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(s)S_1y(s) \tag{5.5.9}$$

取$V(x(k))$的前向差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= 2x^{\mathrm{T}}(k)P_1y(k) + x^{\mathrm{T}}(k)S_2x(k) + y^{\mathrm{T}}(k)(P_1 + hS_1)y(k) \\ &\quad - x^{\mathrm{T}}(k-h)S_2x(k-h) - \sum_{\theta=k-h}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(\theta)S_1y(\theta) \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

考虑到(5.5.8)，有

$$2x^{\mathrm{T}}(k)P_1y(k)=2\eta^{\mathrm{T}}(k)P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}y(k)\\0\end{bmatrix}$$
$$=2\eta^{\mathrm{T}}(k)P^{\mathrm{T}}\left\{\begin{bmatrix}y(k)\\(A(k)+A_d(k)-I)x(k)-y(k)\end{bmatrix}-\sum_{\theta=k-h}^{k-1}\begin{bmatrix}0\\A_d(k)\end{bmatrix}y(\theta)\right\}\tag{5.5.11}$$

其中

$$\eta^{\mathrm{T}}(k)=\begin{bmatrix}x^{\mathrm{T}}(k) & y^{\mathrm{T}}(k)\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\P_2 & P_3\end{bmatrix}$$

由引理 4.6.1，我们有

$$-2\sum_{\theta=k-h}^{k-1}\eta^{\mathrm{T}}(k)P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\A_d(k)\end{bmatrix}y(\theta)\leqslant\sum_{\theta=k-h}^{k-1}\begin{bmatrix}\eta(k)\\y(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}W & M-P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\A_d(k)\end{bmatrix}\\ * & S_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta(k)\\y(k)\end{bmatrix}$$
$$=h\eta^{\mathrm{T}}(k)W\eta(k)+2\eta^{\mathrm{T}}(k)\left(M-P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\A_d(k)\end{bmatrix}\right)(x(k)-x(k-h))+\sum_{\theta=k-h}^{k-1}y^{\mathrm{T}}(\theta)S_1y(\theta)\tag{5.5.12}$$

其中，W、M、S_1 为具有适当维数的定常矩阵，且满足

$$\begin{bmatrix}W & M\\M^{\mathrm{T}} & S_1\end{bmatrix}\geqslant 0\tag{5.5.13}$$

由式(5.5.10)~(5.5.12)，可以得到

$$\Delta V(x(k))\leqslant\eta^{\mathrm{T}}(k)\Psi\eta(k)+2\eta^{\mathrm{T}}(k)\left(P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\A_d\end{bmatrix}-M\right)x(k-h)$$
$$+x^{\mathrm{T}}(k-h)(\alpha_2H_2^{\mathrm{T}}H_2-S_2)x(k-h)-x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)\tag{5.5.14}$$

其中

$$\Psi=P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & I\\A-I & -I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & A^{\mathrm{T}}-I\\I & -I\end{bmatrix}P+hW+\begin{bmatrix}M & 0\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}M^{\mathrm{T}}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_1H_1^{\mathrm{T}}H_1+S_2+Q & 0\\0 & P_1+hS_1\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^{-1}P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\E_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & E_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}P$$

$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$ 为任意标量。

定义

$$\xi^{\mathrm{T}}(k) = \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}}(k) & y^{\mathrm{T}}(k) & x^{\mathrm{T}}(k-h) \end{bmatrix} \tag{5.5.15}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Psi & P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - M \\ \begin{bmatrix} 0 & A_d^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} P - M^{\mathrm{T}} & -S_2 + \alpha_2 H_2^{\mathrm{T}} H_2 \end{bmatrix} \tag{5.5.16}$$

则有

$$\Delta V(x(k)) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(k)\Lambda\xi(k) - x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) \tag{5.5.17}$$

分解矩阵 W、M 为

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^{\mathrm{T}} & W_3 \end{bmatrix},\quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

则由 Schur 补可知，式(5.5.5a)等价于 $\Lambda < 0$，式(5.5.5b)等价于式(5.5.13)，因此，有

$$\Delta V(x(k)) \leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|x(k)\|^2 \tag{5.5.18}$$

同时，由式(5.5.17)可知

$$x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) \leqslant -\Delta V(x(k)) \tag{5.5.19}$$

把不等式(5.5.19)两边累积求和，得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) &\leqslant V(x(0)) \\ &= x^{\mathrm{T}}(0)P_1x(0) + \sum_{\theta=-h}^{-1} x^{\mathrm{T}}(\theta)S_2x(\theta) + \sum_{\theta=-h+1}^{0}\sum_{s=-1+\theta}^{-1} y^{\mathrm{T}}(s)S_1y(s) \end{aligned} \tag{5.5.20}$$

证毕。

下面讨论控制器设计问题，目的是设计无记忆状态反馈控制器

$$u(k) = Kx(k) \tag{5.5.21}$$

使得闭环系统是鲁棒稳定的，同时使得成本函数小于一给定值。

把控制器(5.5.21)带入到式(5.5.1)得到如下的闭环系统：

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= (A+BK+\Delta A(k)+\Delta B(k)K)x(k)+(A_d+\Delta A_d(k))x(t-h) \\
x(k) &= \phi(k), \quad -h \leqslant k \leqslant 0
\end{aligned} \tag{5.5.22}
$$

定理 5.5.2　如果给定标量 $\varepsilon>0$，存在正定对称矩阵 X_1、U_1、U_2，矩阵 $\bar{W}_1$、$\bar{W}_2$、$\bar{W}_3$、Y、Z、K 和标量 $\alpha_1>0, \alpha_2>0$，使得

$$
\begin{bmatrix}
\bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & 0 & 0 & X & \Omega_{16} & Z^{\mathrm{T}} & hZ^{\mathrm{T}} & X & \bar{K}^{\mathrm{T}} \\
* & \bar{\Omega}_{22} & (1-\varepsilon)A_dU_2 & 0 & 0 & 0 & Y^{\mathrm{T}} & hY^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & -U_2 & U_2H_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\alpha_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -X & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -hU_1 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -Q^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1}
\end{bmatrix} < 0 \tag{5.5.23a}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\bar{W}_1 & \bar{W}_2 & 0 \\
\bar{W}_2^{\mathrm{T}} & \bar{W}_3 & \varepsilon A_dU_1 \\
0 & \varepsilon U_1A_d^{\mathrm{T}} & U_1
\end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.5.23b}
$$

其中

$$
\bar{\Omega}_{11} = Z+Z^{\mathrm{T}}+h\bar{W}_1
$$

$$
\bar{\Omega}_{12} = X(A^{\mathrm{T}}+\varepsilon A_d^{\mathrm{T}}-I)+\bar{K}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-Z^{\mathrm{T}}+Y+h\bar{W}_2
$$

$$
\bar{\Omega}_{16} = XH_1^{\mathrm{T}}+\bar{K}^{\mathrm{T}}H_3
$$

$$
\bar{\Omega}_{22} = -Y^{\mathrm{T}}-Y+\sum_{i=1}^{2}\alpha_iE_iE_i^{\mathrm{T}}+h\bar{W}_3
$$

则闭环系统是鲁棒稳定的，同时成本函数满足

$$
J \leqslant J_0 = x^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}x(0)+\sum_{\theta=-h}^{-1}x^{\mathrm{T}}(\theta)U_2^{-1}x(\theta)+\sum_{\theta=-h+1}^{0}\sum_{s=-1+\theta}^{-1}y^{\mathrm{T}}(s)U_1^{-1}y(s)
$$

其中，$y(\theta)=x(\theta+1)-x(\theta)$。

证明 根据定理 5.5.1，控制器$u(k)=Kx(k)$保证闭环系统鲁棒稳定同时具有保成本性能的充分条件是存在标量$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0$

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

和对称正定矩阵 P_1、S_1、S_2，矩阵 W、M，使得

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi} & P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix}-M \\ \begin{bmatrix} 0 & A_d^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}P-M^{\mathrm{T}} & -S_2+\alpha_2^{-1}H_2^{\mathrm{T}}H_2 \end{bmatrix}<0,\quad \begin{bmatrix} W & M \\ M^{\mathrm{T}} & S_1 \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{5.5.24}$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi = {} & P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & I \\ A+BK-I & -I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & A^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-I \\ I & -I \end{bmatrix}P+hW \\ & +\begin{bmatrix} M & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} S_2+Q+K^{\mathrm{T}}RK & 0 \\ 0 & P_1+hS_1 \end{bmatrix} \\ & +\alpha_1^{-1}\begin{bmatrix} H_1^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}H_3 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1+H_3K & 0 \end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ E_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & E_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}P \end{aligned}$$

为了得到线性矩阵不等式结论，我们令

$$M=\varepsilon P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \tag{5.5.25}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ -P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_3^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.5.26}$$

同时定义

$$X=P_1^{-1},\quad Y=P_3^{-1},\quad Z=-YP_2X,\quad \bar{K}=KX$$

$$W=P^{-\mathrm{T}}WP^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{W}_1 & \bar{W}_2 \\ \bar{W}_2^{\mathrm{T}} & \bar{W}_3 \end{bmatrix},\quad S_1^{-1}=U_1,\quad S_2^{-1}=U_2$$

可以得到式(5.5.23)。证毕。

例 5.5.1　考虑系统(5.5.1)，其中

$$A=\begin{bmatrix}0.95 & 0.78\\ 0.76 & 0.87\end{bmatrix},\quad A_d=\begin{bmatrix}0.12 & 0.09\\ 0.11 & 0.07\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.45\end{bmatrix}$$

$$E_1=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.09 & 0.1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}0.11 & 0.19\\ 0.1 & 0.09\end{bmatrix},\quad H_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0.17\\ 0.15 & 0.12\end{bmatrix}$$

$$H_2=\begin{bmatrix}0.08 & 0.05\\ 0.6 & 0.07\end{bmatrix},\quad \phi(k)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{k}{6}}\\ 0\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}0.1 & 0.05\\ 0.05 & 0.09\end{bmatrix},\quad h=6,\quad R=0.05$$

令 $\varepsilon=0$，我们可以得到一个保成本控制器为 $u(k)=\begin{bmatrix}-1.8032 & -1.7311\end{bmatrix}x(k)$，这时 $J_0=0.5703$。

5.6　注　　记

本章重点研究了不确定性的线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制，最优保成本控制问题，所得结论均以线性矩阵不等式的形式给出。

本章的主要内容来源于作者的研究成果。

参　考　文　献

蒋培刚，苏宏业，褚键. 2000. 具有指定衰减度的线性不确定时滞系统鲁棒镇定. 自动化学报，26(5):681-684.

蒋培刚，苏宏业，褚键. 2000. 线性不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定方法研究. 控制与决策，14(2):115-119.

苏宏业，潘红华，蒋培刚，褚键. 2000. 带有一类非线性执行器的不确定时滞系统的鲁棒镇定. 控制与决策，15(1):23-26.

王景成，苏宏业，褚键. 1996. 不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制. 96 中国控制会议论文集. 青岛，137-141.

俞立，褚健，苏宏业. 1996. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty. Automatica. 32(12).

Chen W H, Guan Z H, Lu X. 2003. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. IEE Proc. Control Theory and Appl., 150(4):412-416.

Francis B A, Doyle J C. 1987. Linear control theory with an H_∞ optimality criterion. SIAM-J. Control and Optimization, 25(4): 815-844.

Francis B A. 1987. A Course in H_∞ Control Theory New York：Springer-Verlag.

Fridman E, Shaked U. 2002. A descriptor system approach to H_∞ control of time-delayed systems. IEEE Trans. Auto. Contr., 47(2):253-279.

Fridman E. 2001. New Lyapunov –Krasovskii functionals fir stability of linear retard and neutral type systems. Syst. Contr. Lett., 43: 309-319.

Iwasaki T, Skelton R E. 1994. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 30(8):1307-1317.

Jiang P G, Su H Y, Chu J. 2000. LMI approach to optimal guaranteed cost control for a class of linear uncertain discrete systems. Proc.ACC, Chicago, Illnois, USA, 6: 28-30.

Jiang P G, Su H Y, Chu J. 2000. Optimal guaranteed control for class of linear uncertain time-delay systems. Proc. 3rd WCICA, Hefei, Jun 28-July-2, 2254-3358.

Jiang P G, Su H Y, Chu J. 2000.Optimal guaranteed cost control for a class of linear uncertain discrete systems. Proc. 3rd Asian Control Conference, Shanghai, July, 4-7, 42-46.

Li X, de Souza C E. 1996b. Criteria for robust stability of uncertain linear systems with time-varying state delays. Proc. of 13th World Congress of IFAC, San Francisco, UAS, June 30-July 5, 137-142.

Yu L, Chu J. 1999. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. Automatica, 35(6):1155-1160.

Yu L, Wang J C, Chu J. 1997. Guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. Proc. American Control Conference, Albuquerque, NM,USA, 5: 3181-3184.

Zames G. 1981. Feedback and optimal sensitivity model reference transformation, multiplicative seminorms and approximate inverses. IEEE Trans. Auto. Contr., 26:301-320.

Zhou K, Khargonekar P P. 1988. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. Syst. Contr. Letts., 11:85-92.

第6章　具有饱和执行器的不确定线性时滞系统鲁棒控制

6.1　引　　言

几乎所有控制系统执行器件均存在幅值饱和或幅度约束问题，在某些生产场合为了安全可靠还需人为地对控制器输出幅度进行限制。虽然一些控制系统在实际运行时其固有的约束和饱和问题并未导致明显的性能恶化，但在更多场合其破坏性的影响不可忽略甚至须特别关注。如果在设计控制系统时没有考虑这样的非线性饱和特性，将会导致积分饱和或极限环(Glattfelder et al.,1983)。在过去的一段时间里，许多学者研究了带饱和执行器的线性系统稳定性分析及镇定问题(Glattfelder et al.,1983; Krikelis et al.,1984;Chen et al.,1988b; Klai et al.,1994; Mahmoud,1995; Niu et al.,1998)。Glattfelder 等(1983)研究了一个带饱和执行器的 SISO 系统的稳定性问题，通过采用圆盘定理和 popov 稳定性判据来分析利用 PI 控制的饱和系统的稳定性。Krikelis 等(1984)研究了具有饱和执行器和积分饱和特性系统的跟踪问题，并导出了一个能保证系统渐近稳定的区域。Chen 等(1988a)针对具有饱和执行器和扇形非线性饱和执行器的多变量线性系统进行了研究，并利用 Bellman-Gronwall's 不等式得到了一个保证闭环系统内部稳定和输入/输出稳定的充分条件。Mahmoud (1995)进一步推广这一结果并校正了 Chen 等(1988a)中所存在的不足。Klai 等(1994)把以上结果推广到存在状态滞后的线性系统并得到了一个状态反馈镇定的充分条件。Shen 等(1989)则考虑了系统存在输入滞后时的情形，并给出了能通过状态和输出反馈来镇定系统的充分条件。Liu 等(1995)利用矩阵测度和比较理论对具有多输入时滞和扇形非线性饱和执行器线性系统的鲁棒镇定问题进行了研究，针对三种形式的反馈镇定控制律进行了探讨，但所提出的方法需要预先确定很多参数。近年来，带有饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒镇定问题开始受到关注(Chou et al.,1989; Niculescu et al.,1996)。Chou 等(1989)针对存在单一的状态滞后及饱和执行器的线性不确定时滞系统，用矩阵测度的概念以及比较理论给出了输出反馈镇定的充分条件。Niculescu 等(1996)利用 Razumikhin 方法研究了一类带饱和执行器的线性不确定时滞系统的鲁棒镇定问题，得到了一个可利用线性无记忆状态反馈控制律来进行鲁棒镇定的判据以及相应的控制器设

计方法，但该文所得结果以求解代数 Riccati 方程的形式给出，需要对标量及对称正定矩阵进行整定，而且结果的保守性很大。

本章我们将分别采用线性矩阵不等式方法来研究具有幅值饱和执行器约束和扇形饱和执行器约束的时变不确定时滞系统。在讨论幅值饱和执行器约束时，主要采用以下两种方法：一是基于不变集理论，综合控制器使得闭环系统在保证局部稳定的同时避免控制器输出达到约束界；二是基于二次镇定理论，研究一类常规的非线性饱和执行器，将其非线性作为不确定性来处理。在研究扇形饱和执行器约束时，主要采用二次镇定理论。结论以线性矩阵不等式的形式给出，并可以很容易地推广到具有常规饱和特性的不确定时滞系统。

6.2 具有输入约束的不确定线性时滞系统的局部鲁棒镇定

本节考虑一个简单的具有输入约束的不确定线性时滞系统，借以说明饱和控制系统的研究思路。考虑如下系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&(A+\Delta A(t))x(t)+(A_1+\Delta A_1(t))x(t-d_1)\\&+(B+\Delta B(t))u(t)+(B_1+\Delta B_1(t))u(t-h_1)\end{aligned}\tag{6.2.1}$$

其初始条件为

$$x(t_0+\theta)=\phi(\theta),\quad \theta\in[-\max(d_1,h_1),0]\tag{6.2.2}$$

并且 $\phi(\theta)\in C([-\tau,0],R^n)$，$C([-\tau,0],R^n)$ 中范数定义为 $\|\phi\|_c=\sup\limits_{\theta\in[-\tau,0]}\|\phi(\theta)\|$，$x(t)\in R^n$ 为状态变量，$d_1>0$ 为状态滞后常数，$u(t)\in R^m$ 为控制向量，$h_1>0$ 为控制滞后常数；A、A_1、B 和 B_1 为适当维数的已知实常数矩阵；ΔA、ΔA_1、ΔB 和ΔB_1 表示时变范数有界不确定性，可以表示为

$$\Delta A=HF(t)E_1,\ \ \Delta A_1=HF(t)E_2,\ \ \Delta B=HF(t)E_3,\ \ \Delta B_1=HF(t)E_4\tag{6.2.3}$$

其中，H 和 E_1、E_2、E_3、E_4 为适当维数的已知实常数矩阵，$F(t)\in R^{i\times j}$ 是具有 Legesgue 可测元的时变矩阵函数，且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$。设线性状态反馈控制器为 $u(t)=Kx(t)$，其最大幅值约束为

$$\|u(t)\|_{\max}=\max_i|u_i(t)|=\mu_i,\quad i=1,2,\cdots,m\tag{6.2.4}$$

其中，μ_i 是第 i 个通道的最大幅值约束，选取 Lyapunov 函数为

$$V(x_t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-d_1}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)S_1x(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{t-h_1}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)S_2x(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{6.2.5}$$

式中 $x_t=x(t+\theta)$，$\theta\in[-\max(d_1,h_1),0]$，且 $P,S_1,S_2\in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵，基于 Lyapunov-Krasovskii 定理，有如下定义：

定义 6.2.1 系统(6.2.1)称为鲁棒局部鲁棒可镇定的，如果存在实数 $\varepsilon,\gamma,v>0$ 和带约束(6.2.4)的控制器，使得闭环系统的初始条件 $\phi\in\Phi(v)$ 和不变集条件 $x(t)\in\Omega(P,\gamma)$ 下满足 $\dot{V}(x_t)\leqslant-\varepsilon\|x(t)\|^2$，相应的称该控制器为带约束的局部鲁棒镇定控制器，简称鲁棒镇定控制器，其中

$$\Omega(P,\gamma)=\left\{x(t)\in R^n\mid x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)<\gamma^{-1}\right\},\qquad \gamma>0$$

$$\Phi(v)=\left\{\phi\in C([-\tau,0],R^n)\mid\|\phi\|_c^2\leqslant v\right\},\qquad v>0$$

引理 6.2.1 系统(6.2.1)在初始条件 $\phi\in\Phi(v)$ 和不变集条件 $x(t)\in\Omega(P,\gamma)$ 下是鲁棒局部可镇定当且仅当存在对称正定矩阵 P、S_1、S_2，实数 $\varepsilon,\gamma,v>0$ 以及反馈增益矩阵 K 使得

$$\begin{aligned}&\Xi(A(t),A_1(t),B(t),B_1(t))\\&=\begin{bmatrix}\begin{matrix}A^{\mathrm{T}}(t)P+PA(t)+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(t)P\\+PB(t)K+S_1+S_2+\varepsilon I\end{matrix} & PA_1(t) & PB_1(t)K\\ A_1^{\mathrm{T}}(t)P & -S_1 & 0\\ K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}(t)P & 0 & -S_2\end{bmatrix}<0\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

其中

$$A(t)=A+\Delta A(t)，\quad A_1(t)=A_1+\Delta A_1(t) \tag{6.2.7}$$

$$B(t)=B+\Delta B(t)，\quad B_1(t)=B_1+\Delta B_1(t)$$

证明 对 $V(x_t)$ 沿系统 (6.2.1)对时间 t 求导，容易得到(6.2.6)。证毕。

如果对于任意的 γ 和 v，引理 6.2.1 中条件都是成立的，此谓全局镇定问题；当考虑输入约束时候，全局镇定往往是困难的，局部镇定是较为可行的方案之一。

基于引理 6.2.1，容易得到如下的鲁棒控制器综合算法：

定理 6.2.1 给定控制器幅值约束 μ_i，$i=1,2,\cdots,m$，如果存在对称正定矩阵 X，V_1，$V_2\in R^{n\times n}$，矩阵 $Y\in R^{m\times n}$ 和标量 $\varepsilon,\gamma,v>0$ 及 w_i，$i=1,2,\cdots,m$ 使得如下的一组 LMI 成立：

$$\begin{bmatrix} M & A_1X & B_1Y & XE_1^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & X \\ XA_1^{\mathrm{T}} & -V_1 & 0 & XE_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -V_2 & Y^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}} & 0 \\ E_1X+E_3Y & E_2X & E_4Y & -\varepsilon_1 I & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.2.8a}$$

$$\begin{bmatrix} W & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & X \end{bmatrix} > 0 \tag{6.2.8b}$$

$$w_i < \gamma\mu_i^2 \tag{6.2.8c}$$

其中

$$M = AX + XA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + V_1 + V_2 + \varepsilon_1 HH^{\mathrm{T}}$$

$$W = \mathrm{diag}\{w_1, \cdots, w_m\}$$

则存在控制器 $u(t) = YX^{-1}x(t)$ 使系统(6.2.1)在 $x(t) \in \Omega(P,\gamma)$ 和 $\phi \in \Phi(v)$ 时鲁棒可镇定，其中

$$v = \frac{\gamma^{-1}}{\lambda_{\max}(X^{-1}) + d_1\lambda_{\max}(X^{-1}V_1X^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(X^{-1}V_2X^{-1})} \tag{6.2.9}$$

证明　由引理 6.2.1，系统 6.2.1 是鲁棒可镇定的，如果存在 P、S_1、S_2，实数 $\varepsilon,\gamma,v > 0$ 以及反馈增益矩阵 K 满足(6.2.6)，考虑(6.2.3)，可得

$$\begin{aligned} &\Xi(A(t), A_1(t), B(t), B_1(t)) \\ &= \Xi(A, A_1, B, B_1) + \Xi_1 F(t)\Xi_2 + \Xi_2^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}}(t)\Xi_1^{\mathrm{T}} < 0 \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

其中

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} H^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_2 = \begin{bmatrix} E_1 + E_3K & E_2 & E_4K \end{bmatrix}$$

对任意向量 $\xi \neq 0$，不等式(6.2.10)等价于

$$\xi^{\mathrm{T}}\Xi(A, A_1, B, B_1)\xi + 2\xi^{\mathrm{T}}\Xi_1 F(t)\Xi_2\xi < 0 \tag{6.2.11}$$

设任意实数 $\varepsilon_1 > 0$，有

$$2\xi^{\mathrm{T}}\Xi_1 F(t)\Xi_2\xi \leqslant \varepsilon_1\Xi_1\Xi_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1^{-1}\Xi_2^{\mathrm{T}}\Xi_2 < 0 \tag{6.2.12}$$

则可以得到

$$\Xi(A, A_1, B, B_1) + \varepsilon_1\Xi_1\Xi_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1^{-1}\Xi_2^{\mathrm{T}}\Xi_2 < 0 \tag{6.2.13}$$

应用 Schur 补引理，并引入矩阵 $X = P^{-1}$ ， $Y = KX$ ， $V_1 = XS_1X$ ， $V_2 = XS_2X$ 和 $\varepsilon^{-1} = \varepsilon_2$ ，则可得(6.2.13)等价于(6.2.8a)。考虑到

$$\alpha\|x(t)\|^2 \leqslant V(x_t) \leqslant \beta\|x(t)\|_c^2 \tag{6.2.14}$$

式中

$$\alpha = \lambda_{\min}(X^{-1})$$
$$\beta = \lambda_{\max}(X^{-1}) + d_1\lambda_{\max}(X^{-1}V_1X^{-1}) + h_1\lambda_{\max}(X^{-1}V_2X^{-1})$$

因为 $\dot{V}(x_t) \leqslant -\varepsilon\|x(t)\|^2 < 0$ ，显然有

$$x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \leqslant V(x_t) \leqslant V(x_{t0}) \tag{6.2.15}$$

应用(6.2.14)，并注意到 $x_{t0} = x(t0+\theta) = \phi(\theta) \in \Phi(v)$ 和(6.2.9)，立即可以得到

$$V(x_{t0}) \leqslant \beta\|x_{t0}\|_c^2 = \beta\|\phi(\theta)\|_c^2 = \gamma^{-1} \tag{6.2.16}$$

结合(6.2.15)和(6.2.16)，对所有的初始条件 $\phi \in \Phi(v)$ ，导致状态不变集 $x(t) \in \Omega(P,\gamma)$ 即 $x^{\mathrm{T}}(t)x(t) < \gamma^{-1}X$ ，给定控制器幅值约束 $\|u(t)\|_{\max} = \mu_i$, 则

$$\|u(t)\|_{\max}^2 = \|YX^{-1}x(t)\|_{\max}^2 \leqslant \gamma^{-1}\max_i\left|YX^{-1}Y^{\mathrm{T}}\right| \leqslant \mu_i^2 \tag{6.2.17}$$

令 $YX^{-1}Y^{\mathrm{T}} < W$ ，此即式(6.2.8b)，其中 $W = \mathrm{diag}\{w_1,\cdots,w_m\}$ ，并且 $w_i>0$, (i=1，2，…，m)，进而得到(6.2.8)。

实际问题中，尽可能希望 $\Omega(P,\gamma)$ 和 $\Phi(v)$ 越大越好，直接利用定理 6.2.1 求解一定的优化问题，有下面的推论。

推论 6.2.1　基于线性矩阵不等式，解优化问题

$$\min\gamma \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{LMI}(6.2.8)$$

初始条件最大范围界 v^* 可用式(6.2.9)求得。

当然，上面的优化问题并非全面，更完全的结果应同时最小化 γ 和 β ，显然对于后者直接实现是非常困难的。折中地，我们可以对 X^{-1} 、V_1 和 V_2 的最大特征值增加一些 LMI 条件，以获得更好的结果。

推论 6.2.2　引入新的实数变量 σ, σ_1, $\sigma_2 > 0$ ，使得

$$\begin{bmatrix} \sigma I & I \\ I & X \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \sigma_1 I - V_1 \geqslant 0, \quad \sigma_2 I - V_2 \geqslant 0, \quad \sigma > \sigma_1, \quad \sigma > \sigma_2 \tag{6.2.18}$$

解如下的优化问题：

$$\min \rho\sigma + (1-\rho)\gamma \quad \text{s.t.} \quad \text{LMI}(6.2.8),(6.2.18)$$

其中，$\rho \in [0,1] \subset R^{+}$ 是设计参数以合理分配 σ 和 γ 之间的权重，可得初始条件最大范围界为

$$v^{*} = \frac{\gamma^{-1}}{\sigma + d_1\sigma_1\sigma^2 + h_1\sigma_2\sigma^2}$$

这里，要注意的是上述优化问题 v^{*} 取决于设计参数 ρ，事实上可以通过 ρ 在 $[0,1]$ 上迭代寻优最大的 v^{*}。

例 6.2.1　假设系统(6.2.1)具有如下参数：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\quad E_3 = E_4 = 1,\quad d_1 = 0.8,\quad h_1 = 0.5$$

其中，引入参数 δ 刻画不确定的界，显然此例中只有一个控制作用，设 $\mu_1 = 15, \delta = 0.5$。应用定理 6.2.1，上述系统可镇定，且

$$X = \begin{bmatrix} 0.3995 & -0.2408 \\ -0.2408 & 0.6159 \end{bmatrix},\quad V_1 = \begin{bmatrix} 0.3770 & -0.1769 \\ -0.1769 & 0.9661 \end{bmatrix},\quad V_2 = \begin{bmatrix} 0.4952 & -0.1184 \\ -0.1184 & 0.9458 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.4829 & -0.3214 \end{bmatrix},\quad w_1 = 1.8231,\quad \varepsilon_1 = 1.8698,\quad \varepsilon_2 = 1.4418,\quad \gamma = 0.0135$$

鲁棒镇定控制器增益为 $K = \begin{bmatrix} -1.9929 & -1.3010 \end{bmatrix}$，且有 $v^{*} = 5.3034$。

6.3　具有输入约束的不确定线性时滞系统的全局鲁棒镇定

6.2 节中侧重于应用不变集理论，同时综合控制器时避免输出达到约束界。本节研究一类常规的非线性饱和执行器，将其饱和非线性作为不确定来处理，结果更具有一般性。

考虑如下的不确定线性多时滞系统：

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t)x(t))+\sum_{i=1}^{l}(A_i+\Delta A_i(t))x(t-d_i)$$
$$+(B+\Delta B)u(t)+\sum_{j=1}^{r}(B_j+\Delta B_j(t))u(t-h_j) \tag{6.3.1}$$

初始条件为

$$x(t_0+\theta)=\phi(\theta),\ \ \theta\in[-\max(d_i,h_j),0],\ \ i=1,2,\cdots,l,\ \ j=1,2,\cdots,j \tag{6.3.2}$$

其中

$$u(t)=\mathrm{Sat}(u(t)),\ \ \mathrm{Sat}(u(t))=[\mathrm{Sat}(u_1(t))\ \ \mathrm{Sat}(u_2(t))\cdots\mathrm{Sat}(u_m(t))]$$

其中饱和函数定义为

$$\mathrm{Sat}(u_\sigma(t))=\begin{cases}\underline{u}_\sigma, & u_\sigma(t)\leqslant\underline{u}_\sigma<0\\ u_\sigma(t), & \underline{u}_\sigma\leqslant\underline{u}_\sigma(t)<\bar{u}_\sigma\\ \bar{u}_\sigma, & u_\sigma(t)\geqslant\bar{u}_\sigma>0\end{cases} \tag{6.3.3}$$

幅值饱和特性见图 6.3.1。

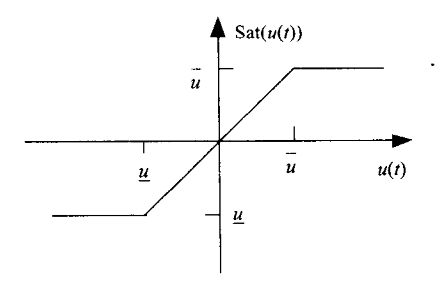


图 6.3.1　幅值饱和特性

假设存在 $d_i^*,h_j^*>0$ 和 $\tau>0$ 使得滞后常数 d_i,h_j 满足

$$0\leqslant d_i\leqslant d_i^*\leqslant\tau,\quad 0\leqslant h_j\leqslant h_h^*\leqslant\tau \tag{6.3.4}$$

不确定性与式(6.2.3)中相同，增加多时滞表示为

$$\begin{aligned}\Delta A&=H_1F_k(t)E_1,\quad \Delta A_i=H_{2i}F_k(t)E_{2i}\\ \Delta B&=H_3F_k(t)E_3,\quad \Delta B_j=H_{4i}F_k(t)E_{4i}\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

式中 $F_k(t)F_k(t)\leqslant I,k\in\Omega\overset{\text{def}}{=\!=}\{1,2i,3,4j\}$，其中 $i=1,\cdots,l,\ j=1,\cdots,r$，$A(t),\ A_i(t),B(t)$ 和 $B_j(t)$ 的定义见(6.2.7)。

定义 6.3.1　系统(6.3.1)称为鲁棒可镇定的，如果在饱和函数(6.3.2)下存在线

性状态反馈控制器使得闭环系统对于所有不确定性满足$\dot{V}(x_t) \leqslant -\varepsilon \|x(t)\|^2$，相应地称该系统为带饱和执行器的鲁棒可镇定系统，控制器简称为鲁棒镇定控制器。

定理 6.3.1　给定d_i^*、h_j^*和τ满足(6.3.4)，如果存在对称正定矩阵X、$P_{j,k}$、$T_{j,k}$、Q_k、Z_k、$\bar{Z}_k$，矩阵Y和正标量$\alpha_k,\varepsilon_k,\beta_{ik},\delta_{jk},k\in\Omega,i=1,\cdots,l,\ j=1,\cdots,r$使得下面 LMI 组有解，则存在鲁棒镇定控制器$u(t)=2YX^{-1}x(t)$使得系统(6.3.1)在饱和执行器条件下是鲁棒可镇定的。

$$\begin{bmatrix} AA^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}}-Q_1 & AE_1^{\mathrm{T}} \\ E_1 A^{\mathrm{T}} & E_1 E_1^{\mathrm{T}}-\varepsilon_1 I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{6.3.6a}$$

$$\begin{bmatrix} A_i A_i^{\mathrm{T}}+\varepsilon_{2i} H_{2i} H_{2i}^{\mathrm{T}}-Q_{2i} & A_i E_{2i}^{\mathrm{T}} \\ E_{2i} A_i^{\mathrm{T}} & E_{2i} E_{2i}^{\mathrm{T}}-\varepsilon_{2i} I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{6.3.6b}$$

$$\begin{bmatrix} BB^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3 H_3 H_3^{\mathrm{T}}-Q_3 & BE_3^{\mathrm{T}} \\ E_3 B^{\mathrm{T}} & E_3 E_3^{\mathrm{T}}-\varepsilon_3 I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{6.3.6c}$$

$$\begin{bmatrix} B_j B_j^{\mathrm{T}}+\varepsilon_{4j} H_{4j} H_{4j}^{\mathrm{T}}-Q_{4j} & B_j E_{4j}^{\mathrm{T}} \\ E_{4j} B_j^{\mathrm{T}} & E_{4j} E_{4j}^{\mathrm{T}}-\varepsilon_{4j} I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{6.3.6d}$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q_k A_i^{\mathrm{T}}+\beta_{ik} H_{2i} H_{2i}^{\mathrm{T}}-T_{i,k} & A_i Q_k E_{2i}^{\mathrm{T}} \\ E_{2i} Q_k A_i^{\mathrm{T}} & E_{2i} Q_k E_{2i}^{\mathrm{T}}-\beta_{ik} I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{6.3.6e}$$

$$\begin{bmatrix} B_j Z_k B_j^{\mathrm{T}}+\delta_{jk} H_{4j} H_{4j}^{\mathrm{T}}-P_{j,k} & B_j Z_k E_{4j}^{\mathrm{T}} \\ E_{4j} Z_k B_j^{\mathrm{T}} & E_{4j} Z_k E_{4j}^{\mathrm{T}}-\delta_{jk} I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{6.3.6f}$$

$$X \geqslant \bar{Z}_k \tag{6.3.6g}$$

$$\bar{Z}_k \geqslant Q_k \tag{6.3.6h}$$

$$\begin{bmatrix} Z_k & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & \bar{Z}_k \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{6.3.6i}$$

$$\begin{bmatrix} S & M_1 & M_2 & M_3 \\ M_1^{\mathrm{T}} & -N_1 & 0 & 0 \\ M_1^{\mathrm{T}} & 0 & -N_2 & 0 \\ M_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -N_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{6.3.6j}$$

其中

$$\begin{aligned} S = {} & XA^{\mathrm{T}} + AX + \sum_i XA_i^{\mathrm{T}} + \sum_i A_i X + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \sum_j B_j Y + \sum_j Y^{\mathrm{T}} B_j^{\mathrm{T}} \\ & + \alpha_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} + \alpha_3 H_3 H_3^{\mathrm{T}} + \sum_i \alpha_{2i} H_{2i} H_{2i}^{\mathrm{T}} + \sum_j \alpha_{4j} H_{4j} H_{4j}^{\mathrm{T}} + Q_3 + \sum_j Q_{4j} \\ & + \sum_i d_i^*(T_{i,1} + 2T_{i,3} + \sum_i T_{i,2i} + 2\sum_j T_{i,4j}) + \sum_i h_j^*(P_{j,1} + 2P_{j,3} + \sum_i P_{j,2j} + 2\sum_j P_{j,4j}) \end{aligned}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} XE_1^{\mathrm{T}} & XE_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & XE_{2l}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\quad M_2 = \begin{bmatrix} YE_3^{\mathrm{T}} & YE_{41}^{\mathrm{T}} & \cdots & YE_{4r}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\quad M_3 = \begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}} & X \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \mathrm{diag}\{\alpha_1 I, \alpha_2 I, \cdots, \alpha_{2l} I\},\quad N_1 = \mathrm{diag}\{\alpha_3 I, \alpha_{41} I, \cdots, \alpha_{4r} I\}$$

$$N_3 = \mathrm{diag}\left\{ (r+1)\left(1 + 2l\sum_{i=1}^{l} d_i^* + 2r\sum_{j=1}^{r} h_i^*\right)^{-1} I \quad (l+1)\left(l\sum_{i=1}^{l} d_i^* + r\sum_{j=1}^{r} h_i^*\right)^{-1} I \right\}$$

证明　设控制器为 $u(t) = 2Kx(t),\ K \in R^{m\times n}$，则闭环系统可以写成

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = {} & [A(t) + B(t)K]x(t) + \sum_{i=1}^{l} A_i(t)x(t-d_i) \\ & + \sum_{j=1}^{r} B_j(t)Kx(t-h_i) + B(t)\eta(t) + \sum_{j=1}^{r} B_j(t)\eta(t-h_i) \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

其中

$$\eta(t) = \mathrm{Sat}(2Kx(t)) - Kx(t)$$

$$\eta(t-h_j) = \mathrm{Sat}(2Kx(t-h_j)) - Kx(t-h_j),\quad j = 1,2,\cdots,r$$

则显然向量函数 $\eta(t)$ 满足

$$\begin{cases} \eta^{\mathrm{T}}(t)\eta(t) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t) \\ \eta^{\mathrm{T}}(t-h_j)\eta(t-h_j) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t-h_j)K^{\mathrm{T}}Kx(t-h_j) \end{cases} \tag{6.3.8}$$

因 $x(t)$ 连续可微，用 Leibniz-Newton 公式，式(6.3.7)可以重写为

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t)=&\left[A(t)+B(t)+\sum_i A_i(t)+\sum_j B_j K\right]x(t)+B(t)\eta(t)\\
&+\sum_j B_j(t)\eta(t-h_j)-\sum_i\int_{-d_i}^{0}A_i(t)\Big\{\left[A(t+s)+B(t+s)K\right]\\
&+\sum_i A_i(t+s)x(t-d_i+s)+\sum_j B_j(t+s)Kx(t-h_j+s)\\
&+B(t+s)\eta(t+s)+\sum_j B_j(t+s)\eta(t-h_j+s)\Big\}\mathrm{d}s\\
&-\sum_j\int_{-h_j}^{0}B_j(t)K\Big\{\left[A(t+s)+B(t+s)K\right]x(t+s)\\
&+\sum_i A_i(t+s)x(t-d_i+s)+\sum_j B_j(t+s)Kx(t-h_i+s)+B(t+s)\eta(t+s)\\
&+\sum_j B_j(t+s)\eta(t-h_j+s)\Big\}\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{6.3.9}
$$

其中， $x(t)=\phi(t),\ t\in[-2\tau,0]$。

显然(6.3.1)可以看作(6.3.9)的一个特例，(6.3.9)的稳定性可以保证(6.3.1)的稳定性。选择如下的 Lyapunov 函数：

$$
\begin{aligned}
V(x(t),t)=&\,x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\sum_j\int_{-h_j}^{0}x^{\mathrm{T}}(s)R_{1j}x(s)\mathrm{d}s\\
&+\sum_i\left\{\int_{-d_i}^{0}\left[\int_{t+s}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)R_{2i}x(\theta)\mathrm{d}\theta+\sum_i\int_{-d_i+s}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)R_{3ii}x(\theta)\mathrm{d}\theta\right.\right.\\
&\left.\left.+\sum_j\int_{t-h_j+s}^{0}x^{\mathrm{T}}(\theta)R_{4ij}x(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}s\right\}+\sum_j\left\{\int_{-h_j}^{0}\left[\int_{t+s}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)R_{5j}x(\theta)\mathrm{d}\theta\right.\right.\\
&\left.\left.+\sum_i\int_{t-d_i+s}^{0}x^{\mathrm{T}}(\theta)R_{6ji}x(\theta)\mathrm{d}\theta+\sum_j\int_{-h_j+s}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)R_{7jj}x(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}s\right\}
\end{aligned}\tag{6.3.10}
$$

其中，P、R_{1j}、R_{2j}、R_{3ii}、R_{4ij}、R_{5j}、R_{6ji}、R_{7jj}($i=1$，…，l，$j=1$，…，r)为对称正定矩阵。沿着系统(6.3.9)的轨迹，有

$$\dot{V}(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)\left\{\left[A(t)+B(t)K+\sum_i A_i(t)+\sum_i B_i(t)K\right]^{\mathrm{T}}P\right.$$
$$\left.+P\left[A(t)+B(t)K+\sum_i A_i(t)+\sum_i B_i(t)K\right]\right\}x(t)$$
$$+f(x(t),t)+g(x(t),t) \tag{6.3.11}$$

其中

$$f(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)\left[\sum_j R_{1j}+\sum_j d_i\left(R_{2i}+\sum_i R_{3ii}+\sum_j R_{4ij}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_j h_j\left(R_{5j}+\sum_i R_{6ji}+\sum_j R_{7jj}\right)\right]x(t)-\sum_j x^{\mathrm{T}}(t-h_j)R_{1j}x(t-h_j)$$
$$-\sum_i\left\{\int_{-d_i}^{0}\left[x^{\mathrm{T}}(t+s)R_{2i}x(t+s)+\sum_i x(t-d_i+s)R_{3ii}x(t-d_i+s)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_j x(t-h_i+s)R_{4ij}x(t-h_j+s)\right]\mathrm{d}s\right\}-\sum_j\left\{\int_{-h_j}^{0}\left[x^{\mathrm{T}}(t+s)R_{5j}x(t+s)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_i x^{\mathrm{T}}(t-d_i+s)R_{6ji}x(t-d_i+s)+\sum_j x^{\mathrm{T}}(t-h_j+s)R_{7jj}x(t-h_j+s)\right]\mathrm{d}s\right\}$$

$$g(x(t),t) = 2x^{\mathrm{T}}(t)PB(t)\eta(t)+2x^{\mathrm{T}}(t)P\left(\sum_j B_j(t)\eta(t-h_j)\right)$$
$$-2x^{\mathrm{T}}(t)P\left\{\sum_i\int_{-d_i}^{0}A_i(t)\left[(A(t+s)+B(t+s)\eta(t+s)+\sum_i A_i(t+s)x(t-d_i+s)\right.\right.$$
$$\left.+\sum_i B_j(t+s)Kx(t-h_j+s)+B(t+s)\eta(t+s)+\sum_j B_j(t+s)\eta(t-h_j+s)\right]\mathrm{d}s$$
$$+\sum_j\int_{-h_j}^{0}B_j(t)K\left[A(t+s)+B(t+s)K)x(t+s)+\sum_i A_i(t+s)x(t-d_i+s)\right.$$
$$\left.\left.+\sum_j B_j(t+s)Kx(t-h_j+s)+B(t+s)\eta(t+s)+\sum_j B_j(t+s)\eta(t-h_j+s)\right]\mathrm{d}s\right\}$$

由引理 4.3.1，显然有

$$\dot{V}(x(t),t) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)W_1x(t)+f(x(t),t)+g(x(t),t) \tag{6.3.12}$$

其中

$$W_1 = A^{\mathrm{T}}P + PA + \sum_i A_i^{\mathrm{T}}P + \sum_i PA_i + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P + PBK + K^{\mathrm{T}}\sum_j B_j^{\mathrm{T}}P + \sum_j PB_jK + P(\alpha_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} + \alpha_3 H_3 H_3^{\mathrm{T}})P + \alpha_1^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1 + \alpha_3^{-1}K^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}E_3K + P\left(\sum_i \alpha_{2i}H_{2i}H_{2i}^{\mathrm{T}} + \sum_j \alpha_{4j}H_{4j}H_{4j}^{\mathrm{T}}\right)P + \sum_i \alpha_{2i}^{-1}E_{2i}^{\mathrm{T}}E_{2i} + \sum_j \alpha_{4j}^{-1}K^{\mathrm{T}}E_{4j}^{\mathrm{T}}E_{4j}K$$

假设存在标量 $\varepsilon_k > 0$ 和对称正定矩阵 $Q_k, k \in \Omega, i = 1,2,\cdots,l, j = 1,2,\cdots,r$ 使得

$$AA^{\mathrm{T}} + AE_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1 I - E_1E_1^{\mathrm{T}})^{-1}E_1A^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1 H_1H_1^{\mathrm{T}} \leqslant Q_1 \tag{6.3.13}$$

$$A_iA_i^{\mathrm{T}} + A_iE_{2i}^{\mathrm{T}}(\varepsilon_{2i} I - E_{2i}E_{2i}^{\mathrm{T}})^{-1}E_{2i}A_i^{\mathrm{T}} + \varepsilon_{2i} H_{2i}H_{2i}^{\mathrm{T}} \leqslant Q_{2i} \tag{6.3.14}$$

$$BB^{\mathrm{T}} + BE_3^{\mathrm{T}}(\varepsilon_3 I - E_3E_3^{\mathrm{T}})^{-1}E_3B^{\mathrm{T}} + \varepsilon_3 H_3H_3^{\mathrm{T}} \leqslant Q_3 \tag{6.3.15}$$

$$B_jB_j^{\mathrm{T}} + B_jE_{4j}^{\mathrm{T}}(\varepsilon_{4j} I - E_{4j}E_{4j}^{T})^{-1}E_{4j}B_j^{\mathrm{T}} + \varepsilon_{4j} H_{4j}H_{4j}^{\mathrm{T}} \leqslant Q_{4j} \tag{6.3.16}$$

其中

$$\varepsilon_k I - E_kE_k^{\mathrm{T}} > 0 \tag{6.3.17}$$

同时，由引理 4.3.2，得

$$A(t+s)A^{\mathrm{T}}(t+s) \leqslant Q_1, \quad A_i(t+s)A_i^{\mathrm{T}}(t+s) \leqslant Q_{2i} \tag{6.3.18}$$

$$B(t)B^{\mathrm{T}}(t) \leqslant Q_3, \quad B(t+s)B^{\mathrm{T}}(t+s) \leqslant Q_3 \tag{6.3.19}$$

$$B_j(t)B_j^{\mathrm{T}} \leqslant Q_{4j}, \quad B_j(t+s)B_j^{\mathrm{T}}(t+s) \leqslant Q_{4j} \tag{6.3.20}$$

类似地，假设存在标量 $\beta_{ik}, \delta_{jk} > 0$ 和对称正定矩阵 $T_{i,k}$ 、 $P_{j,k}$ 使得

$$A_iQ_kA_i^{\mathrm{T}} + A_iQ_kE_{2i}^{\mathrm{T}}(\beta_{ik}I - E_{2i}Q_kE_{2i}^{\mathrm{T}})^{-1}E_{2i}Q_kA_i^{\mathrm{T}} + \beta_{ik}H_{2i}H_{2i}^{\mathrm{T}} \leqslant T_{i,k} \tag{6.3.21}$$

$$B_jZ_kB_j^{\mathrm{T}} + B_jZ_kE_{4j}^{\mathrm{T}}(\beta_{jk}I - E_{4j}Z_kE_{4j}^{\mathrm{T}})^{-1}E_{4j}Z_kB_j^{\mathrm{T}} + \beta_{jk}H_{4j}H_{4j}^{\mathrm{T}} \leqslant P_{j,k} \tag{6.3.22}$$

其中

$$\beta_{ik}I - E_{2i}Q_kE_{2i}^{\mathrm{T}} > 0, \quad \beta_{jk}I - E_{4j}Z_kE_{4j}^{\mathrm{T}} > 0 \tag{6.3.23}$$

并且

$$Z_k \geqslant KQ_kK^{\mathrm{T}} \tag{6.3.24}$$

再由引理 4.3.2，有

$$A_i(t)Q_kA_i^{\mathrm{T}}(t) \leqslant T_{i,k}, \quad B_j(t)KQ_kK^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}} \leqslant P_{j,k} \tag{6.3.25}$$

对 $g(x(t),t)$ 应用引理 4.3.1，同时考虑(6.3.18)~(6.3.20)和(6.3.24)，并令

$$R_{1j} = K^{\mathrm{T}}K, \quad R_{2j} = I + 2K^{\mathrm{T}}K, \quad R_{3ii} = I, \quad R_{4jj} = 2K^{\mathrm{T}}K \tag{6.3.26}$$

$$R_{5j} = I + 2K^{\mathrm{T}}K, \quad R_{6ji} = I, \quad R_{7jj} = 2K^{\mathrm{T}}K \tag{6.3.27}$$

得

$$\dot{V}(x(t),t) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)[W_1 + PW_2P + W_3 + K^{\mathrm{T}}K]x(t) \tag{6.3.28}$$

其中

$$\begin{aligned} W_2 = {} & Q_3 + \sum_j Q_{4j} + \sum_i d_i^* T_{i,1} + 2\sum_i d_i^* T_{i,3} + \sum_i d_i^* \sum_i T_{i,2i} + \sum_i d_i^* \sum_j T_{i,4j} \\ & + \sum_j h_j^* P_{j,1} + 2\sum_j h_j^* P_{j,3} + \sum_j h_j^* \sum_i P_{j,2i} + \sum_j h_j^* \sum_j P_{j,4j} \end{aligned}$$

$$W_3 = rK^{\mathrm{T}}K + (l\sum_{i=1}^{l} d_i^* + r\sum_{j=1}^{r} h_j^*)\{(l+1)I + 2(r+1)K^{\mathrm{T}}K\}$$

因此，如果对于标量 $d_i^* > 0,\ h_j^* > 0$，存在 P、$P_{j,k}$、$T_{i,k}$、Q_k、Z_k 以及 α_k、ε_k、β_{ik}、δ_{jk} 满足(6.3.13)~(6.3.16)，(6.3.21)~(6.3.22)，则(6.3.28)成立，也即对任意的 $0 \leqslant d_i \leqslant d_i^*,\ 0 \leqslant h_j \leqslant h_j^*$，如果(6.3.6a)~(6.3.6f)成立则系统满足定义 6.3.1，其中

$$\varepsilon = -\lambda_{\max}(W_1 + PW_2P + K^{\mathrm{T}}K + W_3) > 0$$

进一步，引入 $X = P^{-1},\ Y = KX$，再引入对称正定矩阵 $\bar{Z}_k > 0$ 使得

$$X \geqslant \bar{Z}_k \geqslant Q_k \tag{6.3.29}$$

如果

$$\begin{bmatrix} Z_k & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & \bar{Z}_k \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{6.3.30}$$

可保证(6.3.24)成立，由此得到(6.3.6g)~(6.3.6i)，最后由

$$X(W_1 + PW_2P + K^{\mathrm{T}}K + W_3)X < 0 \tag{6.3.31}$$

经矩阵等价变换即得(6.3.6j)。证毕。

例 6.3.1　考虑最简单的一种情形 $l=1,\ r=0$，具体如下，且饱和界为 ± 1，

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -0.8 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$H_1=H_{21}=H_3=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 1 & 0.2\end{bmatrix},\quad E_1=E_{21}=E_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

应用定理 6.3.1，对任意的 $d\leqslant 0.2841$，系统是鲁棒可镇定的，当 $d=0.112$ 时，鲁棒控制器增益为

$$K=\begin{bmatrix}-0.0212 & 0.0272\\ -0.0323 & -0.1060\end{bmatrix}$$

6.4　具有扇形饱和特性执行器的不确定线性时滞系统的鲁棒镇定(时滞无关方法)

考虑如下的不确定时滞系统：

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=A(t)x(t)+A_1(t)x\big(t-d(t)\big)+B(t)u'(t)\\&u'(t)=\mathrm{Sat}(u(t)),\quad \mathrm{Sat}(u(t))=[\mathrm{Sat}(u_1(t))\ \ \mathrm{Sat}(u_2(t))\cdots\mathrm{Sat}(u_m(t))]\\&x(t)=\phi(t),\quad t\in[-\tau,\ 0]\end{aligned}\tag{6.4.1}$$

其中 $x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$ 分别是系统的状态向量和执行器控制输入向量，$u'(t)\in R^m$ 是对象的控制输入向量；为了符号描述方便，定义 $A(t)=(A+\Delta A(t))$，$A_1(t)=(A_1+\Delta A_1(t))$，$B(t)=(B+\Delta B(t))$，$A\in R^{n\times n}$，$A_1\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}$ 是具有适当维数的实常矩阵。矩阵 $\Delta A(t), \Delta A_1(t), \Delta B(t)$ 代表系统模型中的时变不确定参数，具有形式

$$\Delta A(t)=H_1F_1(t)E_1,\ \ \Delta A_1(t)=H_2F_2(t)E_2,\ \ \Delta B(t)=H_3F_3(t)E_3,\tag{6.4.2}$$

其中，$H_i,E_i,i=1,2,3$ 为具有适当维数的已知常数矩阵，$F_i(t),i=1,2,3$ 为未知的实时变矩阵，其元素是 Lebesgue 可测的，且满足 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant I,i=1,2,3$。标量 $d(t)$ 表示未知但有界的状态滞后，并假设存在正实数 t 使得对所有的 $t\geqslant 0$ 满足

$$0\leqslant d(t)\leqslant\tau<\infty\tag{6.4.3}$$

$\phi(t)$ 是连续光滑的初始向量函数，它属于 Banach 空间 $C^n[-\tau,0]$ 上的光滑函数

$$\psi:[-\tau,0]\mapsto R^n,\quad \|\psi\|_\infty := \sup_{-\tau\leqslant\eta\leqslant 0}\|\psi(\eta)\|$$

考虑如图 6.4.1 所示的在扇形区域$[\sigma\ 1]$内的非线性饱和函数。

针对不确定时滞系统(6.4.1)，我们引入如下的鲁棒稳定和鲁棒可镇定概念。

定义 6.4.1　不确定时滞系统(6.2.1)是鲁棒稳定的，如果系统(6.4.1)在$u(t)\equiv 0$时其$x(t)\equiv 0$的平凡解对所有允许的不确定性$\Delta A(t)$和$\Delta A_1(t)$是渐近稳定的。不确定时滞系统(6.4.1)是鲁棒可镇定的，如果存在一个线性状态反馈控制律$u(t)=Kx(t)$使得闭环系统是鲁棒稳定的。

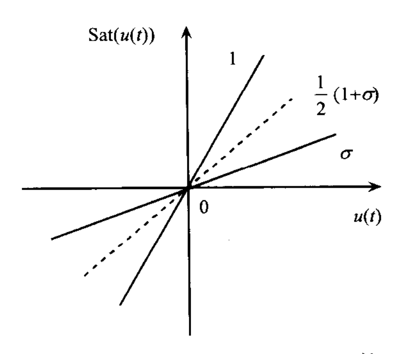


图 6.4.1　扇形非线性饱和函数

在本节中，我们针对具有扇形非线性饱和执行器的不确定时滞系统(6.4.1)，给出一个鲁棒可镇定的充分条件以及相应的控制器综合方法。主要结果由下面的定理给出。

定理 6.4.1　不确定时滞系统(6.4.1)是鲁棒可镇定的，如果存在对称正定矩阵X、Q，矩阵Y和正标量$\alpha_i>0(i=1,2,3,4),\varepsilon>0$满足以下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} Q-BB^{\mathrm T}-\varepsilon H_3H_3^{\mathrm T} & BE_3^{\mathrm T} \\ E_3B^{\mathrm T} & \varepsilon I-E_3E_3^{\mathrm T}\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{6.4.4a}$$

$$\begin{bmatrix} S & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ M_1^{\mathrm T} & -N_1 & 0 & 0 & 0 \\ M_2^{\mathrm T} & 0 & -N_2 & 0 & 0 \\ M_3^{\mathrm T} & 0 & 0 & -N_3 & 0 \\ M_4^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & -N_4 \end{bmatrix}<0 \tag{6.4.4b}$$

其中

$$S = AX + XA^{\mathrm{T}} + \frac{1+\sigma}{2}(BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i H_i H_i^{\mathrm{T}} + \frac{1+\sigma}{2}\alpha_3 H_3 H_3^{\mathrm{T}} + Q + \alpha_4 A_1 A_1^{\mathrm{T}}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} XE_1^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \mathrm{diag}\{\alpha_1 I, \alpha_2 I\}, \quad M_2 = X, \quad N_2 = \alpha_4 I$$

$$M_3 = \frac{1-\sigma}{2}Y^{\mathrm{T}}, \quad N_3 = I, \quad M_4 = Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}, \quad N_4 = \frac{2}{1+\sigma}\alpha_3 I$$

那么，一个合适的鲁棒镇定控制律由下式给出：

$$u(t) = YX^{-1}x(t) \tag{6.4.5}$$

证明　对不确定(6.4.1)，引入控制律 $u(t) = Kx(t)$，其中控制律增益矩阵 $K \in R^{m\times n}$，那么闭环系统可写为

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \left[A(t) + \frac{1+\alpha}{2}B(t)K\right]x(t) + A_1(t)x(t-d) + B(t)\eta(t) \\ &x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

其中，$\eta(t) = \mathrm{Sat}(Kx(t)) - \dfrac{1+\alpha}{2}Kx(t)$。显然，向量函数 $\eta(t)$ 满足如下的不等式：

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)\eta(t) \leqslant \frac{1}{4}(1-\sigma)^2 x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t) \tag{6.4.7}$$

选取系统(6.4.6)的 Lyapunov 函数为

$$V(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)R_1 x(s)\mathrm{d}s \tag{6.4.8}$$

其中，P、R_1 是对称正定矩阵，则 $V(x(t),t)$ 沿系统(6.4.6)的轨迹关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t),t) = {} & x^{\mathrm{T}}(t)\left\{\left[A(t) + \frac{1}{2}(1+\alpha)B(t)K\right]^{\mathrm{T}} P + P\left[A(t) + \frac{1}{2}(1+\alpha)B(t)K\right] + R_1\right\}x(t) \\ & + 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_1(t)x(t-d) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PB(t)\eta(t) - x^{\mathrm{T}}(t-s)R_1 x(t-d) \end{aligned} \tag{6.4.9}$$

对(6.4.9)应用引理 4.2.3，可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t),t) = {} & x^{\mathrm{T}}(t)W_1 x(t) + x^{\mathrm{T}}(t-s)(\alpha_4^{-1}I + \alpha_2^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_2 - R_1)x(t-d) \\ & + x^{\mathrm{T}}(t)PB(t)B^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \end{aligned} \tag{6.4.10}$$

其中

$$W_1 = A^{\mathrm{T}}P + PA + \frac{1+\sigma}{2}(K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P + PBK) + R_1 + \alpha_1^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1 + P\left[\sum_{i=1}^{2}\alpha_i H_i H_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}(1+\sigma)\alpha_3 H_3 H_3^{\mathrm{T}} + \alpha_4 A_1 A_1^{\mathrm{T}}\right]P + \frac{1+\sigma}{2}\alpha_3^{-1}K^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}E_3K + \frac{(1-\sigma)^2}{4}K^{\mathrm{T}}K$$

假定存在标量 $\varepsilon>0$ 和对称正定矩阵 Q 使得以下的不等式满足：

$$BB^{\mathrm{T}} + BE_3^{\mathrm{T}}(\varepsilon I - E_3E_3^{\mathrm{T}})^{-1}E_3B^{\mathrm{T}} + \varepsilon H_3H_3^{\mathrm{T}} \leqslant Q \tag{6.4.11}$$

其中

$$\varepsilon I - E_3E_3^{\mathrm{T}} > 0 \tag{6.4.12}$$

应用引理 4.3.1，可得

$$B(t)B^{\mathrm{T}}(t) \leqslant Q \tag{6.4.13}$$

令

$$R_1 = \alpha_4^{-1}I + \alpha_2^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_2 \tag{6.4.14}$$

可得

$$\dot{V}(x(t),t) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)[W_1 + PQP]x(t) = x^{\mathrm{T}}(t)W_2x(t) \tag{6.4.15}$$

其中

$$W_2 = A^{\mathrm{T}}P + PA + \frac{1+\sigma}{2}(K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P + PBK) + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_i + \alpha_4^{-1}I + P\left[\sum_{i=1}^{2}\alpha_i H_i H_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}(1+\sigma)\alpha_3 H_3 H_3^{\mathrm{T}} + \alpha_4 A_1 A_1^{\mathrm{T}} + Q\right]P + \frac{1+\sigma}{2}\alpha_3^{-1}K^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}E_3K + \frac{(1-\sigma)^2}{4}K^{\mathrm{T}}K$$

如果存在对称正定矩阵 P、Q，矩阵 K 和标量 $\alpha_i>0(i=1,2,3,4)$ 和 $\varepsilon>0$ 满足不等式(6.4.11)、(6.4.12)及 $W_2<0$，那么对所有的允许的不确定性，有

$$\dot{V}(x(t),t) = -\alpha\|x(t)\|^2 \tag{6.4.16}$$

其中，$\alpha=\lambda_{\max}(W_2)>0$。$\lambda_{\max}(W_2)$ 为 W_2 的最大特征值。由 Lyapunov 定理和定义 6.4.1，对任意满足 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant I(i=1,2,3)$ 的不确定性，闭环系统(6.4.6)是鲁棒稳定的，亦即原来的不确定时滞系统(6.4.1)是鲁棒可镇定的。

引入新的矩阵变量 X，令 $X=P^{-1}$，并令 $W_3=XW_2X$，则有

$$
\begin{aligned}
W_2 = {} & XA^{\mathrm{T}} + AX + \frac{1+\sigma}{2}(XK^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + BKX) + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i^{-1}XE_i^{\mathrm{T}}E_iX \\
& + \alpha_4^{-1}XX + \left[\sum_{i=1}^{2}\alpha_iH_iH_i^{\mathrm{T}} + \frac{1+\sigma}{2}\alpha_3H_3H_3^{\mathrm{T}} + \alpha_4A_1A_1^{\mathrm{T}} + Q\right] \\
& + \frac{1+\sigma}{2}\alpha_3^{-1}XK^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}E_3KX + \frac{(1-\sigma)^2}{4}XK^{\mathrm{T}}KX
\end{aligned} \tag{6.4.17}
$$

令 $Y = KX$ ，并应用 Schur 引理，可知不等式(6.4.11)，(6.4.12)和 $W_3 < 0$ 等价于 LMI (6.4.4)。证毕。

显然，当系统中不存在不确定性的情况下，也即 $H_i = 0$ 和 $E_i = 0,\ i = 1,2,3$ ，我们有如下推论：

推论 6.4.1　当系统(6.4.1)不含有不确定性时，也即 $H_i = 0$ 和 $E_i = 0,\ i = 1,2,3$ ，该系统是可镇定的，如果存在对称正定矩阵 X, Q，矩阵 Y 和标量 $\alpha > 0$ 满足如下的线性矩阵不等式：

$$
Q - BB^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{6.4.18a}
$$

$$
\begin{bmatrix}
AX + XA^{\mathrm{T}} + \frac{1+\sigma}{2}(BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) + Q + \alpha A_1A_1^{\mathrm{T}} & X & \frac{1-\sigma}{2}Y^{\mathrm{T}} \\
X & -\alpha I & 0 \\
\frac{1-\sigma}{2}Y & 0 & -I
\end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.18b}
$$

同时，一个合适的鲁棒镇定控制律由下式给出：

$$
u(t) = YX^{-1}x(t) \tag{6.4.19}
$$

系统(6.4.1)仅仅考虑状态滞后，没有考虑输入滞后的情况。基于定理 6.4.1 的结果，下面我们考虑一类同时具有状态滞后和输入滞后的一类不确定系统

$$
\begin{aligned}
& \dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-d(t)) + B(t)u'(t) + B_1(t)u'(t-d_2) \\
& u'(t) = \mathrm{Sat}(u(t)), \quad \mathrm{Sat}(u(t)) = [\mathrm{sat}(u_1(t))\ \ \mathrm{sat}(u_2(t)) \cdots \mathrm{sat}(u_m(t))] \\
& x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau,\ 0]
\end{aligned} \tag{6.4.20}
$$

$B_1(t) = B_1 + \Delta B_1(t)$ ， B_1 为已知的定常矩阵， $\Delta B_1(t) = H_4F_4(t)E_4$ ， $F_4(t)$ 的元素是 Lebesgue 可测的，且满足 $F_4^{\mathrm{T}}(t)F_4(t) \leqslant I$ ，其他参数定义和系统(6.4.1)中定义相同。对于该系统，我们有如下定理：

定理 6.4.2　不确定时滞系统(6.4.20)是鲁棒可镇定的，如果存在对称正定 X、

Q_1、Q_2，矩阵 Y 和标量 $\alpha_i > 0(i=1,2,\cdots,8)$，$\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ 满足如下的 LMIs：

$$\begin{bmatrix} Q_1 - BB^{\mathrm{T}} - \varepsilon_1 H_3 H_3^{\mathrm{T}} & BE_3^{\mathrm{T}} \\ E_3 B^{\mathrm{T}} & \varepsilon_1 I - E_3 E_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{6.4.21a}$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 - B_1 B_1^{\mathrm{T}} - \varepsilon_2 H_4 H_4^{\mathrm{T}} & B_1 E_4^{\mathrm{T}} \\ E_4 B_1^{\mathrm{T}} & \varepsilon_2 I - E_4 E_4^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{6.4.21b}$$

$$\begin{bmatrix} S & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ M_1^{\mathrm{T}} & -N_1 & 0 & 0 & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}} & 0 & -N_2 & 0 & 0 \\ M_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -N_3 & 0 \\ M_4^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -N_4 \end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.21c}$$

$$S = AX + XA^{\mathrm{T}} + \frac{1+\sigma}{2}(BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) + \alpha_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} + \alpha_4 H_2 H_2^{\mathrm{T}} + \alpha_3 A_1 A_1^{\mathrm{T}}$$
$$+ Q_1 + Q_2 + \frac{1+\sigma}{2}(\alpha_2 H_3 H_3^{\mathrm{T}} + \alpha_5 B_1 B_1^{\mathrm{T}} + \alpha_6 H_4 H_4^{\mathrm{T}})$$

$$M_1 = X, \quad N_1 = \alpha_3 I$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} XE_1^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \mathrm{diag}\{\alpha_1 I, \alpha_4 I\}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sigma}{2}Y^{\mathrm{T}} & \frac{1-\sigma}{2}Y^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_3 = \mathrm{diag}\left\{\alpha_7, \alpha_8 I, \frac{2\alpha_5}{1+\sigma}\right\}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_4 = \mathrm{diag}\left\{\frac{2\alpha_2}{1+\sigma}I, \frac{2\alpha_6}{1+\sigma}I\right\}$$

那么，一个合适的鲁棒镇定控制律由下式给出：

$$u(t) = YX^{-1}x(t) \tag{6.4.22}$$

证明　取 Lyapunov 函数为

$$V(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d_1}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)R_1 x(s)\mathrm{d}s + \int_{t-d_2}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)R_2 x(s)\mathrm{d}s \tag{6.4.23}$$

类似于定理 6.3.1 的证明，假设存在标量 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ 和对称正定矩阵 Q_1，Q_2 使得以下不等式成立：

$$BB^{\mathrm{T}} + BE_3^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1 I - E_3E_3^{\mathrm{T}})^{-1}E_3B^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1 H_3H_3^{\mathrm{T}} \leqslant Q_1 \tag{6.4.24}$$

$$B_1B_1^{\mathrm{T}} + BE_4^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2 I - E_4E_4^{\mathrm{T}})^{-1}E_4B_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 H_4H_4^{\mathrm{T}} \leqslant Q_2 \tag{6.4.25}$$

其中

$$\varepsilon_1 I - E_3E_3^{\mathrm{T}} > 0 \tag{6.4.26}$$

$$\varepsilon_2 I - E_4E_4^{\mathrm{T}} > 0 \tag{6.4.27}$$

令

$$R_1 = \alpha_3^{-1}I + \alpha_4^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_2 \tag{6.4.28}$$

$$R_2 = \frac{1+\sigma}{2}(\alpha_5^{-1}K^{\mathrm{T}}K + \alpha_6^{-1}K^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}}E_4K) + \frac{(1-\sigma)^2}{4}\alpha_8^{-1}K^{\mathrm{T}}K \tag{6.4.29}$$

综合可得

$$\dot{V}(x(t),t) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)W_1x(t) \tag{6.4.30}$$

其中

$$\begin{aligned}W_1 = {} & A^{\mathrm{T}}P + PA + \frac{1+\sigma}{2}(PBK + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P) + R_1 + R_2 + \alpha_1^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1 \\ & \times \frac{1+\sigma}{2}\alpha_2^{-1}K^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}E_3K + P\left(\alpha_1H_1H_1^{\mathrm{T}} + \frac{1+\sigma}{2}\alpha_2H_3H_3^{\mathrm{T}} + \alpha_3A_1A_1^{\mathrm{T}} + \alpha_4H_2H_2^{\mathrm{T}}\right. \\ & \left. + \frac{1+\sigma}{2}\alpha_5B_1B_1^{\mathrm{T}} + \frac{1+\sigma}{2}\alpha_6H_4H_4^{\mathrm{T}} + Q_1 + Q_2\right)P + \frac{(1-\sigma)^2}{4}\alpha_7^{-1}K^{\mathrm{T}}K\end{aligned}$$

类似于定理 6.4.1 的证明，定理 6.4.2 得证。

例 6.4.1　考虑一类不确定线性时滞系统，其中非线性饱和执行器在扇形区间 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 内，且系统动态描述如下：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.8 & -0.5 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H_i = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},\quad E_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad i = 1,2,3$$

$$F_i(t)=\begin{bmatrix}\sin(t) & 0\\ 0 & \cos(t)\end{bmatrix},\quad i=1,2,3,\quad d=0.8|\sin(t)|$$

假设系统的非线性饱和特性为 $\text{Sat}(u_i(t))=u_i(t)-\frac{2}{3}u_i(t)\times\text{Rand}(t)$。其中 $\text{Rand}(t)$ 是产生 0 到 1 之间平均分布的随机数。求解线性矩阵不等式(6.4.1)可到一组可行解

$$X=\begin{bmatrix}0.9634 & -0.4379\\ -0.4379 & 15.9186\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-3.8407 & 0.5315\\ -2.8287 & -1.5418\end{bmatrix}$$

则一个使得闭环系统鲁棒稳定的无记忆状态反馈控制器增益为

$$K=YX^{-1}=\begin{bmatrix}-4.0219 & -0.0772\\ -3.0180 & -0.1799\end{bmatrix}$$

6.5　具有扇形饱和特性执行器的不确定线性时滞系统的鲁棒镇定(时滞依赖方法)

对于系统(6.4.1),本节将给出具有扇形饱和特性执行器不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定方法。主要结果由下面的定理给出：

定理 6.5.1　不确定线性时滞系统(6.4.1)是鲁棒二次可镇定的，如果存在对称正定矩阵 X、Q、P_1、P_2、P_3，矩阵 Y 和标量 $\alpha_i>0$，$\varepsilon_i>0$, $\beta_i>0$, $(i=1, 2, 3)$满足如下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix}S & M_1 & M_2 & M_3 & M_4\\ M_1^{\mathrm T} & -N_1 & 0 & 0 & 0\\ M_2^{\mathrm T} & 0 & -N_2 & 0 & 0\\ M_3^{\mathrm T} & 0 & 0 & -N_3 & 0\\ M_4^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & -N_4\end{bmatrix}<0 \tag{6.5.1a}$$

$$\begin{bmatrix}Q-BB^{\mathrm T}-\varepsilon_1H_3H_3^{\mathrm T} & BE_3^{\mathrm T}\\ E_3B^{\mathrm T} & \varepsilon_1-E_3E_3^{\mathrm T}\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{6.5.1b}$$

$$\begin{bmatrix}X & XE_1^{\mathrm T} & XA^{\mathrm T}\\ E_1X & \beta_1I & 0\\ AX & 0 & P_1-\beta_1H_1H_1^{\mathrm T}\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{6.5.1c}$$

$$\begin{bmatrix} X & XE_2^{\mathrm{T}} & XA_1^{\mathrm{T}} \\ E_2X & \beta_2 I & 0 \\ A_1X & 0 & P_2-\beta_2H_2H_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{6.5.1d}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \\ E_3Y & \beta_3 I & 0 \\ BY & 0 & P_3-\beta_3H_3H_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{6.5.1e}$$

其中

$$P_0 = P_1 + P_2 + \frac{1+\sigma}{2}P_3$$

$$S = XA^{\mathrm{T}} + AX + XA_1^{\mathrm{T}} + A_1X + \frac{1+\sigma}{2}(BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) + \alpha_1H_1H_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2H_2H_2^{\mathrm{T}}$$
$$+\frac{1+\sigma}{2}H_3H_3^{\mathrm{T}} + Q + \tau A_1P_0A_1^{\mathrm{T}} + \tau\varepsilon_2H_2H_2^{\mathrm{T}} + \frac{5+\sigma}{2}\tau X + \tau A_1QA_1^{\mathrm{T}}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} XE_1^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \mathrm{diag}\{\alpha_1 I, \alpha_1 I\}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} & \frac{1-\sigma}{2}Y^{\mathrm{T}} & \frac{1-\sigma}{2}\sqrt{\tau}Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \mathrm{diag}\left\{\frac{2\alpha_3}{1+\sigma},\ I,\ I\right\}$$

$$M_3 = \sqrt{\tau}A_1P_0E_2^{\mathrm{T}}, \quad N_3 = \varepsilon_2 I - E_2P_0E_2^{\mathrm{T}}, \quad M_4 = \sqrt{\tau}A_1QE_2^{\mathrm{T}}, \quad N_4 = \varepsilon_2 I - E_2QE_2^{\mathrm{T}}$$

同时，可得一个合适的无记忆状态反馈控制器为

$$u(t) = YX^{-1}x(t) \tag{6.5.2}$$

证明 对不确定系统时滞系统(6.4.1)引入控制律 $u(t)=Kx(t)$。并令

$$\eta(t) = \mathrm{Sat}(Kx(t)) - \frac{1+\sigma}{2}Kx(t) \tag{6.5.3}$$

显然，向量函数 $\eta(t)$ 满足下面的不等式：

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)\eta(t) \leqslant \frac{(1-\sigma)^2}{4}x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t) \tag{6.5.4}$$

那么闭环系统可以写成为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[A(t) + \frac{1+\sigma}{2}B(t)K\right]x(t) + A_1(t)x(t-d) + B(t)\eta(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

由 Leibniz-Newton 公式，可得

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&\left[A(t)+\frac{1+\sigma}{2}B(t)K+A_1(t)\right]x(t)+B(t)\eta(t)\\&-\int_{-d}^{0}A_1(t)\left[A(t+s)x(t+s)+\frac{1+\sigma}{2}B(t+s)Kx(t+s)\right.\\&\left.+A_1(t+s)x(t+s-d)+B(t+s)\eta(t+s)\right]\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{6.5.6}$$

选取系统的 Lyapunov 函数为

$$V(x(t),t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{-d}^{0}\int_{t+s}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)Rx(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\tag{6.5.7}$$

则此 Lyapunov 函数沿着系统(6.4.1)的轨迹关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t),t)=&x^{\mathrm{T}}(t)\left[\left(A(t)+\frac{1+\sigma}{2}B(t)K+A_1(t)\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A(t)+\frac{1+\sigma}{2}B(t)K+A_1(t)\right)\right]x(t)\\&+L(x(t),t)+2x^{\mathrm{T}}(t)PB(t)\eta(t)+dx^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)-\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t+s)Qx(t+s)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{6.5.8}$$

其中

$$\begin{aligned}L(x(t),t)=&-2x^{\mathrm{T}}(t)P\int_{-d}^{0}A_1(t)\left[A(t+s)x(t+s)+\frac{1+\sigma}{2}B(t+s)Kx(t+s)\right.\\&\left.+A_1(t+s)x(t+s-d)+B(t+s)\eta(t+s)\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由引理 4.2.3，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t),t)=&x^{\mathrm{T}}(t)W_1x(t)+L(x(t),t)+2x^{\mathrm{T}}(t)PB(t)\eta(t)\\&+\tau x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)-\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t+s)Qx(t+s)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{6.5.9}$$

其中

$$\begin{aligned}W_1=&A^{\mathrm{T}}P+PA+A_1^{\mathrm{T}}P+PA_1+\frac{1+\sigma}{2}(KBP+PB^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}})+\alpha_1PH_1H_1^{\mathrm{T}}P+\alpha_1^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1\\&+\alpha_2PH_2H_2^{\mathrm{T}}P+\alpha_2^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_2+\frac{1+\sigma}{2}\alpha_3PH_3H_3^{\mathrm{T}}P+\frac{1+\sigma}{2}\alpha_3^{-1}K^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}E_3K\end{aligned}$$

假设存在标量 $\varepsilon_1>0$ 和对称正定矩阵 Q 使得下式成立：

$$BB^{\mathrm{T}}+BE_3^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1I-E_3E_3^{\mathrm{T}})^{-1}E_3B^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1H_3H_3^{\mathrm{T}}\leqslant Q_1\tag{6.5.10}$$

$$\varepsilon_1I-E_3E_3^{\mathrm{T}}>0\tag{6.5.11}$$

则有

$$
\begin{aligned}
2x^{\mathrm{T}}(t)PB\eta(t) &\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)PB(t)B^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\eta^{\mathrm{T}}(t)\eta(t) \\
&\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)PQPx(t)+\frac{(1-\sigma)^2}{4}x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t)
\end{aligned} \tag{6.5.12}
$$

同样，由引理4.2.3，可得

$$
\begin{aligned}
&L(x(t),t) \\
&\leqslant \tau x^{\mathrm{T}}(t)PA_1(t)P_0A_1(t)Px(t)+\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t+s)A^{\mathrm{T}}(t+s)P_1^{-1}A(t+s)x(t+s)\mathrm{d}s \\
&\quad+\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t+s-d)A_1^{\mathrm{T}}(t+s)P_2^{-1}A_1(t+s)x(t+s-d)\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{1+\sigma}{2}\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t+s)K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(t+s)P_3^{-1}B(t+s)Kx(t+s)\mathrm{d}s \\
&\quad+\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t)PA_1^{\mathrm{T}}(t)B(t+s)B^{\mathrm{T}}(t+s)A_1^{\mathrm{T}}(t)x(t)\mathrm{d}s+\int_{-d}^{0}\eta^{\mathrm{T}}(t+s)\eta(t+s)\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{6.5.13}
$$

其中 $P_0=P_1+P_2+\dfrac{1+\sigma}{2}P_3$，且有

$$
\begin{aligned}
&\tau x^{\mathrm{T}}(t)PA_1(t)P_0A_1^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \\
&\leqslant \tau x^{\mathrm{T}}(t)P\left[A_1P_0A_1^{\mathrm{T}}+A_1P_0E_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I-E_2P_0E_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2P_0A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2H_2H_2^{\mathrm{T}}\right]Px(t)
\end{aligned} \tag{6.5.14}
$$

显然下式成立：

$$
\int_{-d}^{0}\eta^{\mathrm{T}}(t+s)\eta(t+s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{(1-\sigma)^2}{4}\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t+s)K^{\mathrm{T}}Kx(t+s)\mathrm{d}s \tag{6.5.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t)A_1(t)B(t+s)B^{\mathrm{T}}(t+s)A_1^{\mathrm{T}}(t)Px(t)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \tau x^{\mathrm{T}}(t)PA_1(t)QA_1^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\tau x^{\mathrm{T}}(t)P\left[A_1QA_1^{\mathrm{T}}+A_1QE_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I\right. \\
&\quad\left.-E_2QE_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2QA_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3H_2H_2^{\mathrm{T}}\right]Px(t)
\end{aligned} \tag{6.5.16}
$$

假设存在标量 β_1，β_2，$\beta_3>0$ 使得

$$
A^{\mathrm{T}}(P_1-\beta_1H_1H_1^{\mathrm{T}})^{-1}A+\beta_1^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1\leqslant P \tag{6.5.17}
$$

$$
A_1^{\mathrm{T}}(P_2-\beta_3H_3H_3^{\mathrm{T}})^{-1}A_1+\beta_2^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_2\leqslant P \tag{6.5.18}
$$

$$
(BK)^{\mathrm{T}}(P_3-\beta_3H_3H_3^{\mathrm{T}})^{-1}BK+\beta_3^{-1}E_3^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KE_3\leqslant P \tag{6.5.19}
$$

$$
P_i-\beta_iH_iH_i^{\mathrm{T}}>0,\quad i=1,2,3 \tag{6.5.20}
$$

为应用 Razumikhin 定理，进一步假设存在一个实数 $q>1$ 使得如下不等式成立：

$$V(x(s),s)\leqslant qV(x(t),t),\quad t-2\tau\leqslant s\leqslant t \tag{6.5.21}$$

由(6.5.15)~(6.5.21)，应用引理 4.3.4，并令 $R=\dfrac{(1-\sigma)^2}{4}K^{\mathrm{T}}K$ 可得

$$\begin{aligned}&L(x(t),t)+\tau x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)-\int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(t+s)Rx(t+s)\mathrm{d}t\\&\leqslant\tau x^{\mathrm{T}}(t)P\left[A_1P_0A_1^{\mathrm{T}}+A_1P_0E_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I-E_2P_0E_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2P_0A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2H_2H_2^{\mathrm{T}}\right]Px(t)\\&\quad+\frac{5+\sigma}{2}\tau qx^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\frac{(1-\sigma)^2}{4}\tau x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t)\\&\quad+\tau x^{\mathrm{T}}(t)P\left[A_1QA_1^{\mathrm{T}}+A_1QE_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_3I-E_2QE_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2QA_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3H_2H_2^{\mathrm{T}}\right]Px(t)\end{aligned}\tag{6.5.22}$$

因而有

$$\dot V(x(t),t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)W_2x(t) \tag{6.5.23}$$

其中

$$\begin{aligned}W_2&=A^{\mathrm{T}}P+PA+A_1^{\mathrm{T}}P+PA_1+\frac{1+\sigma}{2}(PBK+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P)+\alpha_1PH_1H_1^{\mathrm{T}}P\\&\quad+\alpha_1^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1+\alpha_2PH_2H_2^{\mathrm{T}}P+\alpha_2^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_2+\frac{1+\sigma}{2}(\alpha_3PH_3H_3^{\mathrm{T}}P+\alpha_3^{-1}K^{\mathrm{T}}E_3^{-1}E_3K)\\&\quad+\frac{5+\sigma}{2}\tau qP+\frac{(1-\sigma)^2}{4}(1+\tau)K^{\mathrm{T}}K+PQP\\&\quad+\tau\left[A_1QA_1^{\mathrm{T}}+A_1QE_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_3I-E_2QE_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2QA_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3H_2H_2^{\mathrm{T}}\right]P\\&\quad+\tau\left[A_1P_0A_1^{\mathrm{T}}+A_1P_0E_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I-E_2P_0E_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2P_0A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2H_2H_2^{\mathrm{T}}\right]P\end{aligned}$$

引入 $X=P^{-1}$，$Y=KX$，$W_3=XW_2X$，则 $W_2<0$ 等价于 $W_3<0$，显然，W_3 对 q 和 r 是单调递增的。令 $W=W_3$，其中 $q=1$，如果对某个 $\tau>0$ 存在对称正定矩阵 X、Q、P_1、P_2、P_3，矩阵 Y 和标量 $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, $\varepsilon_i>0, i=1,2,3$ 满足矩阵不等式(6.5.1)，则一定存在一个充分小的 $q>1$ 使得对任意的 $0\leqslant d\leqslant\tau$ 有 $W_3<0$，即对任意的 $0\leqslant d\leqslant\tau$，有

$$V(z(t),t)\leqslant-\alpha\|x(t)\|^2 \tag{6.5.24}$$

其中，$\alpha=\lambda_{\max}(W_2)>0$，$\lambda_{\max}(W_2)$ 表示矩阵 W_2 的最大特征值，由 Razumikhin 定理可知这是闭环系统式鲁棒稳定的。

再由 Schur 引理，(6.5.10)，(6.5.11) (6.5.17)~(6.5.21)和 $W<0$ 等价于线性矩阵不等式(6.5.1)。证毕。

例 6.5.1 考虑具有如下参数的不确定时滞系统:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ -0.8 & -0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$H_i=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\quad E_i=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad i=1,2,3$$

系统的非线性饱和函数为 $\mathrm{Sat}(u_i(t))=u_i(t)-\dfrac{2}{3}u_i(t)\times\mathrm{Rand}(t)$。其中 $\mathrm{Rand}(t)$ 是产生 0 到 1 之间平均分布的随机数。故可取 $\sigma=0.8$，系统的滞后函数为 $d=0.2|\sin(t)|$，求解线性矩阵不等式(6.5.1)可到一组可行解

$$X=\begin{bmatrix}6.2823 & 1.6591\\ 1.6591 & 91.1732\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-17.9388 & -1.1226\\ -11.4081 & -32.6219\end{bmatrix}$$

则一个使得闭环系统鲁棒稳定的无记忆状态反馈控制器增益为

$$K=YX^{-1}=\begin{bmatrix}-2.8660 & 0.0398\\ -1.7291 & -0.3263\end{bmatrix}$$

6.6 具有扇形饱和非线性特性执行器不确定线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

考虑如下的不确定时滞系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A(t)x(t)+A_1(t)x(t-d_1)+B(t)u'(t)+B_1u'(t-d_2)+D_1\omega(t)\\ z(t)&=C_1(t)x(t)+C_2(t)u'(t)+D_2\omega(t)\end{aligned}\tag{6.6.1}$$

其中

$$\begin{aligned}&u'(t)=\mathrm{Sat}(u(t)),\quad \mathrm{Sat}(u(t))=[\mathrm{Sat}(u_1(t))\ \ \mathrm{Sat}(u_2(t))\cdots\mathrm{Sat}(u_m(t))]\\ &x(t)=\phi(t),\quad t\in[-\tau,\ 0]\end{aligned}\tag{6.6.2}$$

其中，$x(t)\in R^n$ 是状态变量，$u(t)\in R^m$ 是执行器的控制输入向量(由所设计的控制器输出)，$u'(t)\in R^m$ 是对象的控制输入向量，$A(t)=A+\Delta A(t)$，$A_1(t)=A_1+\Delta A_1(t)$，$B(t)=B+\Delta B(t)$，$B_1(t)=B_1+\Delta B_1(t)$，$C_1(t)=C_1+\Delta C_1(t)$，$C_2(t)=C_2+\Delta C_2(t)$，$A,A_1\in R^{n\times n}$，$B,B_1\in R^{n\times m}$，$C_1\in R^{r\times n}$，$C_2\in R^{r\times m}$ 是已知的定常矩阵。矩阵 $\Delta A(t),\ \Delta_1 A(t)$，$\Delta B(t),\ \Delta B_1(t)$，$\Delta C_1(t),\ \Delta C_2(t)$ 代表系统模型中的时变不确定参数，

其为连续的实矩阵函数并具有适当的维数。本节依然考虑扇形饱和非线性。标量 d_1、d_2 表示未知且有界的状态滞后，并假设存在正实数 τ 使得对所有的 t 满足

$$0 \leqslant d_{1,2} \leqslant \tau < \infty \tag{6.6.3}$$

$\phi(t)$ 是连续且光滑的初始向量函数，它属于 Banach 空间 $C^n[-\tau,0]$ 上的光滑函数

$$\Psi:[-\tau,0] \mapsto R^n, \quad \|\Psi\|_\infty := \sup_{-\tau\leqslant\eta\leqslant0}\|\Psi(\eta)\| \tag{6.6.4}$$

又假设不确定性具有以下形式：

$$\begin{aligned}&\Delta A(t)=H_1F_1(t)E_1,\quad \Delta A_1(t)=H_2F_2(t)E_2,\quad \Delta B(t)=H_3F_3(t)E_3\\&\Delta B_1(t)=H_4F_4(t)E_4,\quad \Delta C_1(t)=H_5F_5(t)E_5,\quad \Delta C_2(t)=H_6F_6(t)E_6\end{aligned} \tag{6.6.5}$$

其中，$F_i(t),\ i=1,2,\cdots,6$ 为具有适当维数的未知的实时变函数，其元素是 Lebesgue 可测的，且满足

$$F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t) \leqslant I, \quad i=1,2,\cdots,6 \tag{6.6.6}$$

定义 6.6.1　不确定时滞系统(6.6.1)是鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 可镇定的，如果存在一个静态线性状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$ 使得闭环系统是鲁棒稳定的，且有

$$\|z(t)\|_2 \leqslant \gamma\|\omega(t)\|, \quad \forall\omega(t)\in L_2[0,\infty) \tag{6.6.7}$$

并称 $u(t)=Kx(t)$ 是一鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 镇定控制器。

对于定义 6.6.1 给出的问题，我们给出如下结果：

定理 6.6.1　给定标量 $\gamma>0$，不确定时滞系统(6.6.1)是鲁棒 $H_\infty-\gamma$ 可镇定的，如果存在对称正定矩阵 $X>0,\ Q_1>0,\ Q_2>0$，矩阵 Y 和正标量 $\alpha_i>0(i=1, 2, \cdots, 8)$, $\varepsilon_i>0,\ \varepsilon_2>0$ 满足如下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} Q_1-BB^{\mathrm{T}}-\varepsilon_1H_3H_3^{\mathrm{T}} & BE_3^{\mathrm{T}}\\ E_3B^{\mathrm{T}} & \varepsilon_1-E_3E_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}>0 \tag{6.6.8a}$$

$$\begin{bmatrix} Q_2-B_1B_1^{\mathrm{T}}-\varepsilon_4H_4H_4^{\mathrm{T}} & B_1E_4^{\mathrm{T}}\\ E_4B_1^{\mathrm{T}} & \varepsilon_4-E_4E_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{6.6.8b}$$

$$\begin{bmatrix} S & M_1 & M_2 & M_3 & M_4\\ M_1^{\mathrm{T}} & -N_1 & 0 & 0 & 0\\ M_2^{\mathrm{T}} & 0 & -N_2 & 0 & 0\\ M_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -N_3 & 0\\ M_4^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -N_4\end{bmatrix}<0 \tag{6.6.8c}$$

其中

$$S = XA^{\mathrm{T}} + AX + \frac{1+\sigma}{2}(BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \alpha_2 H_3 H_3^{\mathrm{T}} + \alpha_5 B_1 B_1^{\mathrm{T}} + \alpha_6 H_4 H_4^{\mathrm{T}})$$
$$+ \alpha_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} + \alpha_3 A_1 A_1^{\mathrm{T}} + \alpha_4 H_2 H_2^{\mathrm{T}} + Q_1 + Q_2$$

$$M_1 = X, \quad N_1 = \varepsilon_3 I$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} XE_1^{\mathrm{T}} & XE_2^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}} & XE_5^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \mathrm{diag}\left\{\alpha_1 I, \alpha_4 I, 0.2I, \frac{1}{7\theta_1} I\right\}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sigma}{2} Y^{\mathrm{T}} & \frac{1-\sigma}{2} Y^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad N_3 = \mathrm{diag}\left\{\alpha_7 I, \alpha_8 I, \frac{2\alpha_5}{1+\sigma} I\right\}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}} E_3^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}} E_4^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}} C_2^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \mathrm{diag}\left\{\frac{2\alpha_2}{1+\sigma} I,\ \frac{2\alpha_6}{1+\sigma} I,\ 0.2I,\ \frac{4}{7(\theta_3 + \theta_2\theta_4)(1-\sigma)^2 + 28\theta_2\theta_4} I\right\}$$

$$\theta_1 = \lambda_{\max}(H_5^{\mathrm{T}} H_5), \quad \theta_2 = \lambda_{\max}(H_6^{\mathrm{T}} H_6), \quad \theta_3 = \lambda_{\max}(C_2^{\mathrm{T}} C_2), \quad \theta_4 = \lambda_{\max}(E_6^{\mathrm{T}} E_6)$$

同时，可得一个合适的鲁棒 $H_\infty - \gamma$ 镇定控制器为

$$u(t) = YX^{-1}x(t) \tag{6.6.9}$$

证明 引入控制器 $u(t) = Kx(t)$，并取闭环系统的 Lyapunov 函数为

$$V(x(t),t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{-d_1}^{0} x^{\mathrm{T}}(s)R_1 x(s)\mathrm{d}s + \int_{-d_2}^{0} x^{\mathrm{T}}(s)R_2 x(s)\mathrm{d}s \tag{6.6.10}$$

很显然，如果下式满足：

$$\dot{V}(x(t),t) + z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 \omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) \leqslant 0 \tag{6.6.11}$$

且闭环系统是鲁棒稳定的，则有

$$J = \int_0^{\infty} (z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 \omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t))\mathrm{d}t \leqslant 0 \tag{6.6.12}$$

即 $\|z(t)\|_2 \leqslant \gamma \|\omega(t)\|$ 满足。

由定理 6.4.2 的证明，假设存在标量 $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ 和对称正定矩阵 Q_1、Q_2 使得以下的不等式成立：

$$BB^{\mathrm{T}}+BE_3^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1 I-E_3E_3^{\mathrm{T}})^{-1}E_3B^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1H_3H_3^{\mathrm{T}}\leqslant Q_1 \tag{6.6.13}$$

$$B_1B_1^{\mathrm{T}}+BE_4^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2 I-E_4E_4^{\mathrm{T}})^{-1}E_4B_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2H_4H_4^{\mathrm{T}}\leqslant Q_2 \tag{6.6.14}$$

其中

$$\varepsilon_1 I-E_3E_3^{\mathrm{T}}>0 \tag{6.6.15}$$

$$\varepsilon_2 I-E_4E_4^{\mathrm{T}}>0 \tag{6.6.16}$$

并令

$$R_1=\alpha_3^{-1}I+\alpha_4^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_2 \tag{6.6.17}$$

$$R_2=\frac{1+\sigma}{2}(\alpha_5^{-1}K^{\mathrm{T}}K+\alpha_6^{-1}K^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}}E_4K)+\frac{(1-\sigma)^2}{4}\alpha_8^{-1}K^{\mathrm{T}}K \tag{6.6.18}$$

可得

$$\dot V(x(t),t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)W_1x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)PD_1\omega(t)+\omega^{\mathrm{T}}(t)D_1^{\mathrm{T}}Px(t) \tag{6.6.19}$$

其中

$$\begin{aligned}W_1=&A^{\mathrm{T}}P+PA+\frac{1+\sigma}{2}(PBK+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P)+R_1+R_2+\alpha_1^{-1}E_1^{\mathrm{T}}E_1\\&+\frac{1+\sigma}{2}\alpha_2^{-1}K^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}}E_3K+P\Big[\alpha_1H_1H_1^{\mathrm{T}}+\frac{1+\sigma}{2}\alpha_2H_3H_3^{\mathrm{T}}+\alpha_3A_1A_1^{\mathrm{T}}+\alpha_4H_2H_2^{\mathrm{T}}\\&+\frac{1+\sigma}{2}\alpha_5B_1B_1^{\mathrm{T}}+\frac{1+\sigma}{2}\alpha_6H_4H_4^{\mathrm{T}}+Q_1+Q_2\Big]P+\frac{(1-\sigma)^2}{4}\alpha_7^{-1}K^{\mathrm{T}}K\end{aligned}$$

进一步

$$\begin{aligned}z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\leqslant&\,7x^{\mathrm{T}}(t)C_1^{\mathrm{T}}C_1x(t)+7x^{\mathrm{T}}(t)\Delta C_1^{\mathrm{T}}\Delta C_1x(t)\\&+\frac{7(1+\sigma)^2}{4}x^{\mathrm{T}}(t)\left(K^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}C_2K+K^{\mathrm{T}}\Delta C_2^{\mathrm{T}}\Delta C_2K\right)x(t)\\&+7\eta^{\mathrm{T}}(t)\left(C_2^{\mathrm{T}}C_2+\Delta C_2^{\mathrm{T}}\Delta C_2\right)\eta(t)+7\omega^{\mathrm{T}}(t)D_2^{\mathrm{T}}D_2\omega(t)\\\leqslant&\,7x^{\mathrm{T}}(t)C_1^{\mathrm{T}}C_1x(t)+7\theta_1x^{\mathrm{T}}(t)E_5^{\mathrm{T}}E_5x(t)+\frac{7(1+\sigma)^2}{4}x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}C_2Kx(t)\\&+\frac{7\theta_3}{4}(1-\sigma)^2x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t)+7\theta_2\theta_4x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t)\\&+\frac{7\theta_2\theta_4}{4}(1-\sigma)^2x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t)+7\omega^{\mathrm{T}}(t)D_2^{\mathrm{T}}D_2\omega(t)\end{aligned} \tag{6.6.20}$$

综合(6.6.19)和(6.6.20)，有

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(x(t),t)+z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\\
&\leqslant\begin{bmatrix}x(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}W\begin{bmatrix}x(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}x(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}S_1 & PD_1\\ D_1^{\mathrm{T}}P & 7D_2^{\mathrm{T}}D_2-\gamma^2 I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.6.21}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
S_1=&W_1+7C_1^{\mathrm{T}}C_1+7\theta_1E_5^{\mathrm{T}}E_5+\frac{7(1+\sigma)^2}{4}K^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}C_2K\\
&+\frac{4}{7(\theta_3+\theta_2\theta_4)(1-\sigma)^2+28\theta_2\theta_4}K^{\mathrm{T}}K
\end{aligned}
$$

式(6.6.21)满足的充分条件是$W\leqslant 0$，而且$W\leqslant 0$的一个必要条件是$S_1\leqslant 0$，其可保证闭环系统是鲁棒稳定的，令$X=P^{-1}$，$Y=KX$，$W\leqslant 0$等价于

$$
\begin{bmatrix}X & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1 & PD_1\\ D_1^{\mathrm{T}}P & 7D_2^{\mathrm{T}}D_2-\gamma^2 I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\leqslant 0 \tag{6.6.22}
$$

基于 Schur 引理，(6.6.22)等价于线性矩阵不等式(6.6.8c)，式(6.6.13)~(6.6.16)等价于(6.6.8a) 和(6.6.8b)。证毕。

例 6.6.1　考虑一具有如下参数的线性不确定时滞系统：

$$
A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ -0.8 & -0.5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0.15 & 0\\ 0 & 0.15\end{bmatrix}
$$

$$
C_1=\begin{bmatrix}0.05 & 0\\ 0 & 0.3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\end{bmatrix},\ D_1=\begin{bmatrix}0.15\\ 0.1\end{bmatrix}
$$

$$
H_i=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,6,\quad E_i=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad i=1,2,3,4,\quad E_i=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\quad i=5,6
$$

系统的滞后函数为

$$
d_1=0.3+0.3\sin(2t),\quad d_2=0.15+0.15\sin(2t)
$$

扇形区域的饱和函数为

$$u'(t) = u(t)[-0.6 + 0.4\cos(u(t))]$$

故可取 $\sigma = 0.2$ ，求解线性矩阵不等式(6.6.8)可到一组可行解

$$X = \begin{bmatrix} 0.3686 & -0.0279 \\ -0.0279 & 14.3388 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -21.5972 & -7.1504 \\ -2.2280 & -4.4662 \end{bmatrix}$$

则一个使闭环系统鲁棒稳定的无记忆状态反馈控制器增益为

$$K = YX^{-1} = \begin{bmatrix} -55.9150 & -0.6074 \\ -5.7871 & -0.3227 \end{bmatrix}$$

6.7 注　记

本章重点研究了具有饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒稳定性及鲁棒二次镇定问题，所得结论均以线性矩阵不等式的形式给出。

本章的主要内容来源于作者的研究成果。

参 考 文 献

苏宏业，蒋培刚，褚健. 2000. 带饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒镇定. 自动化学报，26(3):356-359.

Chen B S, Lu H C. 1988a. State estimation of large-scale systems. Int. J. Contr., 47(6):1613-1620.

Chen B S, Wang S S. 1988b. The stability of feedback control with nonlinear saturating actuators: time domain approach. IEEE Trans. Auto. Contr., 33(3):483-487.

Chen B S, Wang S S, Lu H C. 1988c. Stabilization of time-delay systems containing saturating actuators. Int. J. Control, 47(6):867-881.

Chou J H, Horng I R, Chen B S. 1989. Dynamic feedback compensator for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. Int. J. Control, 49(7):961-968.

Glattfelder A H, Schaufelberger W. 1983. Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits. IEEE Trans. Auto. Contr, 28(7):1074-1080.

Krikelis N J. 1980. State feedback integral control with intelligent integrator. Int. J. Control, 32(3):465-473.

Klai M, Tarbouriech S, Burgat C. 1994. Some independent time-delay stabilization of linear systems with saturating controls. Proc. IEE Contr.'94, Coventry, U.K., 1994:1358-1363.

Krikelis N J, Barkas S K. 1984. Design of tracking systems subject to actuator saturation and integrator wind-up, Int. J. Control, 39: 667-682.

Liu C M, Shone F C, Kuo J B. 1995. Closed-form physical back-gate-bias dependent quasi-saturation model for SOI lateral DMOS devices with self-heating for circuit simulation, IEEE Int Symp Power Semocond Dev Ics ISPSD, 321-324.

Mahmoud M S. 1995. Dynamic controllers for systems with actuators. Int. J. Syst. Science, 26(2):359-374.

Niculescu S I, Dion J M, Dugard L. 1996. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. IEEE Trans. Auto. Contr., 41(5):742-747.

Niu W G, Tomizuka M. 1998. A general framework of coordinated motion control subjected to actuatoration. Proc. ACC'98, Philadalphia, UAS, 3843-3847.

Su H Y, Chu J.1999. Stabilization of a class of uncertain time-delay systems containing saturating actuators. International Journal of Systems Science, 30 (11): 1193-1203.

Su H Y, Gu Y, Jiang P G, Chu J. 1998. Robust control for a class of uncertain time-delay systems containing saturation actuators. Proc. CDC'98, Tampa, Florida, USA, 305-306.

Su T J, Liu P L, Tsay J T. 1991. Stabilization of delay-dependent for saturating actuator systems. Proc. Of 30rd Conf. Decision and Control., Brighton, U.K., 2891-2982.

Shen J C, Kung F C. 1989. Stabilization of input-delay systems with saturating actuators, Int. J. Control, 44: 1667-1680.

Tissir E, Hmamed A. 1992. Further results on the stabilization of time delay systems containing saturating actuators. Int. J. Syst. Science, 23(4): 615-622.

Wang W J, Chen B S. 1988. Stability of large-scale systems with saturating actuators. Int. J. Contr., 47(3):827-830.

第 7 章　不确定时滞系统的滑模控制

7.1　引　　言

滑模控制作为变结构控制的一个重要分支，由于其所呈现出的特有性质，如对匹配干扰的绝对鲁棒性和降阶特性等，从 20 世纪 80 年代以来得到高度的重视和广泛的研究。本章将介绍滑模控制的基本原理、综合方法和在时滞系统上的应用。着重于给出一个时滞系统的滑模控制器设计方法，使得读者对滑模控制在时滞系统上的应用有初步了解。

7.2　滑 模 控 制

7.2.1　滑模控制的基本概念

所谓的滑模控制系统是这样的系统：系统在一定的控制器作用下，其轨迹在有限时间内到达并保持在预先设定的滑模面上，使得闭环系统稳态运行在此滑模面上，从而呈现某些独有的特性。

为了更好地阐述滑模控制的基本概念，考虑如下的二阶系统，该系统为双位式自动驾驶仪的简化模型(高为炳，1998)，

$$\ddot{x} = a\dot{x} + u \tag{7.2.1}$$

其中，$a > 0$，x 是航向偏离给定方向的角度，为系统输出量，u 是船舵产生的力矩，为系统控制量。

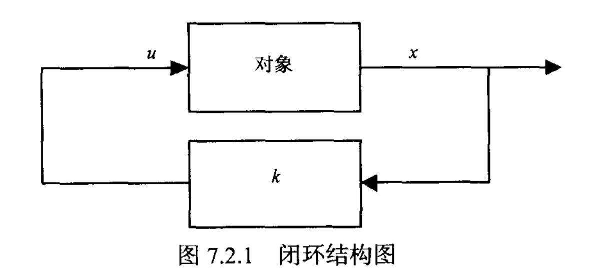


图 7.2.1　闭环结构图

采用图 7.2.1 所示的闭环结构图，控制量为 $u = kx$，其中 k 为反馈增益，则闭环系统为

$$\ddot{x} - a\dot{x} - kx = 0 \tag{7.2.2}$$

容易验证此时系统的特征值为$\lambda_{1,2} = a/2 \pm \sqrt{a^2/4+k}$，故无论$k$取何值系统都是不稳定的。图 7.2.2 和图 7.2.3 分别给出了$k>0$和$k<-a^2/4$时的系统相轨迹图，其中一个是鞍点，一个是不稳定的焦点(这里省略了$-a^2/4<k<0$情况，该情况下系统的两个极点一个稳定的，一个是不稳定)。

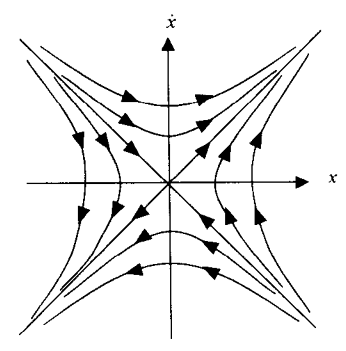


图 7.2.2　$k>0$时的系统相轨迹图

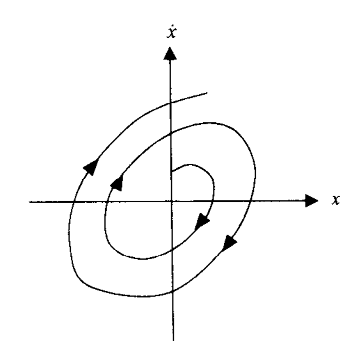


图 7.2.3　$k<-a^2/4$时的系统相轨迹图

那么是不是系统(7.2.1)是无法镇定的呢？定义系统(7.2.1)的状态向量为$x_1 = x$和$x_2 = \dot{x}$，则系统的状态方程描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{7.2.3}$$

易验证系统是可控的。采用控制量

$$u = -x - (a+1)\dot{x} \tag{7.2.4}$$

即可镇定系统。此时的闭环系统结构如图 7.2.4 所示。

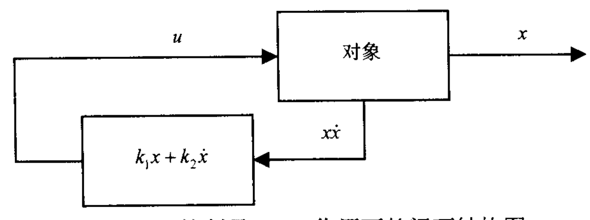


图 7.2.4　控制量(7.2.4)作用下的闭环结构图

从上面的分析可以看出，系统(7.2.1)是可以镇定的，但是采用图 7.2.1 的闭环

结构是无法镇定的。而图 7.2.2 所示的闭环结构用到了输出量的一阶导数，这显然增加了整个系统架构的复杂度和成本，而且这样的一阶导数在实际应用中常常是较难甚至是无法直接得到的。

下面，我们将不加解释地直接给出系统(7.2.1)滑模控制方法，具体的设计方法和步骤将在随后的章节中阐述。

图 7.2.5 给出了滑模控制作用下的闭环系统的方块结构图。从图上可以看出整个闭环系统的基本架构与图 7.2.1 是一致的，所采用的控制量仅与系统的输出量有关。与图 7.2.1 的闭环结构相比，增加了一个逻辑环节用来切换控制量的增益。相应的控制率为

$$u=\begin{cases}-kx, & xs>0\\ kx, & xs<0\end{cases} \tag{7.2.5}$$

其中，k 为反馈增益，满足 $k>a^2/4$，标量 s 为预先设定的滑模面，定义为

$$s=cx+\dot{x}=0 \tag{7.2.6}$$

其中，c 为滑模面参数，满足 $0<c<-\left(a/2-\sqrt{a^2/4+k}\right)$。这里的逻辑环节就是根据条件变量 xs 的符号来调整系统的反馈增益。

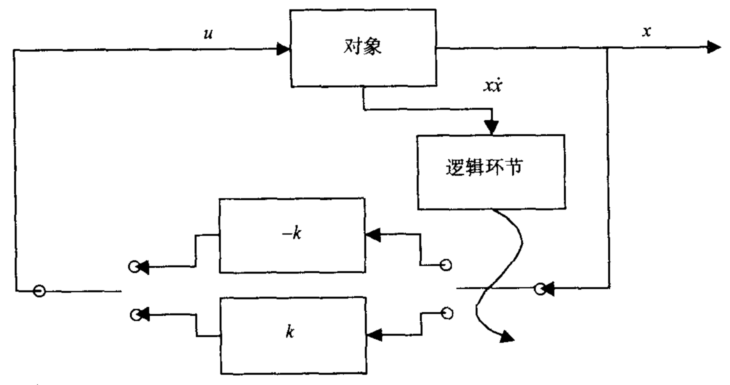


图 7.2.5　滑模控制下的闭环系统结构图

从相平面来看，开关线 $xs=0$ 将平面分成了四个区域，如图 7.2.6 所示。在区域 I 和 III 中系统采用不稳定焦点的结构，而区域 II 和 IV 中采用鞍点的结构。在这样的选择下，两个不稳定系统最终却组合成了一个渐近稳定的系统。具体的相轨迹图参见图 7.2.6。从图上可见，无论系统的初始状态位于任何区域，在滑模控制率(7.2.5)的作用下，系统的轨迹都会在有限时间后达到预先设定的滑模面 $s=0$

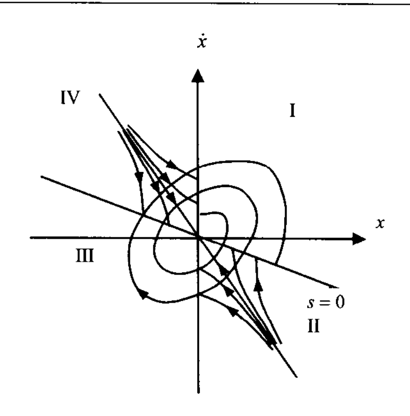


图 7.2.6　滑模控制率下闭环系统的相轨迹图

上。当系统到达滑模面后，在理想情况下，即开关频率无限大，系统将保持在滑模面运动，即$s\equiv 0$。而由式(7.2.6)，我们可得系统的动态方程为

$$\dot{x}=-cx \tag{7.2.7}$$

故闭环系统将以指数收敛率e^{-ct}渐近趋近零点。

这里我们需要指出的是，若系统初始状态就位于 II、IV 区的渐近线$\dot{x}-\left(a/2-\sqrt{a^2/4+k}\right)x=0$上，系统将会沿着渐近线渐近趋向零点，收敛率为$\mathrm{e}^{\left(a/2-\sqrt{a^2/4+k}\right)t}$，而滑模面也将会渐近趋近和非有限时间到达。然而考虑到此渐近线的任意小的领域内的点出发的轨迹都将逐渐远离此渐近线，而实际系统中总是存在扰动，哪怕是极其微小的扰动，都将使得系统离开此渐近线，然后将逐渐远离。因此我们可以不很严格地说任意初始位置出发的轨迹都将在有限时间内到达滑模面，然后保持在其上以e^{-ct}的收敛率趋近零点。

从这个例子，我们可以看出系统在滑模控制下呈现出了渐近稳定性，而这个特性是采用任何固定的输出反馈都无法达到的独有特性。尽管滑模控制中的逻辑模块的输入同样需要用到输出量的一阶导数，但通常情况下，逻辑模块作为实际动力系统的辅助模块，其建立的成本和复杂度一般是远远小于相应闭环系统的反馈部分。

另外，从上述例子中，我们还可以看到滑模控制的两个基本组成部分——滑模面和控制率，与他们相关的两个概念是滑动模态稳定性和滑模面有限时间稳定性。

所谓滑动模态稳定性，即是系统保持在滑模面上运动，此时的动态系统称为滑动模态，应该稳定。该稳定性取决于滑模面的设计，如滑模面(7.2.6)，其中的滑模面参数$c>0$。从式(7.2.7)易见，若$c<0$，系统的滑动模态是不稳定的。

所谓滑模面有限时间稳定性，即是系统的滑模面函数系统在有限时间内到达并保持在零点。该稳定性取决于控制率的设计，如图 7.2.6 所示，在控制率(7.2.5)作用下，存在一时间 $T>0$，使得 $s(t)=0$，$\forall t>T$。

7.2.2 滑模控制的内在本质

7.2.1 节的例子显示了滑模控制的一些独特的特性，那么一个很自然的问题就是：滑模控制是怎样做到这点的？这个问题的研究可以认为是滑模控制内在本质的研究，本节将结合滑模控制器的设计对此问题做初步探索。

为方便起见，依然以系统(7.2.1)为例，并考虑系统输入通道带来的外部干扰，其闭环结构如图 7.2.7 所示。

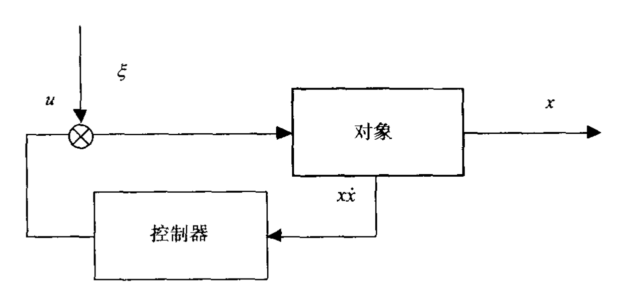


图 7.2.7　存在输入通道干扰的闭环结构图

系统的状态方程可写为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(u+\xi) \tag{7.2.8}$$

其中，$x=x_1$ 为系统输出量。

首先考虑常规的状态反馈控制

$$u=k_1x_1+k_2x_2 \tag{7.2.9}$$

其中，k_1 和 k_2 为反馈增益。则闭环系统的动态方程为

$$\ddot{x}-(a+k_2)\dot{x}-k_1x=\xi \tag{7.2.10}$$

选择合适的增益 k_1 和 k_2 使得二次方程 $p^2-(a+k_2)p-k_1=0$ 的解均位于左半复平面。若干扰 ξ 是慢时变函数，即 $\dot{\xi}\approx\ddot{\xi}\approx 0$，则可得微分方程(7.2.10)的稳态解为

$$x(\infty)=\xi/k_1 \tag{7.2.11}$$

因此在常规状态反馈下，输入通道的干扰将以 k_1^{-1} 倍影响系统的稳态输出。

现在，我们将对系统(7.2.8)设计滑模控制器。

(1) 设计滑模面

$$s(t)=c_1x_1+c_2x_2=0 \tag{7.2.12}$$

其中，$s(t)\in R$ 是滑模面函数，c_1 和 c_2 是不全为零的滑模面参数。容易验证 $c_2\neq 0$，否则，滑模面为 $x_1=0$，由 $\dot{x}_1=x_2$，则 $x_2\neq 0$ 时，任何控制率下，滑模面都将不能保持。不失一般性，可设 $c_2=1$，由 $s=0$，可得 $x_2=-c_1x_1$。将其 $\dot{x}_1=x_2$，则系统的滑动模态方程为

$$\dot{x}_1=-c_1x_1 \tag{7.2.13}$$

取滑模面参数 $c_1>0$，则滑动模态稳定。

(2) 综合控制率

考虑滑模面函数系统，

$$\dot{s}=c_1\dot{x}_1+\dot{x}_2=c_1x_2+ax_2+u+\xi \tag{7.2.14}$$

采用如下控制率：

$$u=-(c+a)\dot{x}-\eta\,\mathrm{sgn}(s) \tag{7.2.15}$$

其中，正实数 $\eta>|\xi|_{\max}$。考虑 Lyapunov 函数 $V=0.5s^2$，易验证

$$\dot{V}\leqslant\sqrt{2}\eta_0\sqrt{V} \tag{7.2.16}$$

其中，正实数 η_0 满足 $\eta>|\xi|_{\max}+\eta_0$。式(7.2.16)显示了滑模面函数系统是有限时间稳定的。因此，从(7.2.13)知，当 $t>T$ 时，系统轨迹为

$$x_1(t)=\mathrm{e}^{-c(t-T)}x_1(T),\qquad x_2(t)=-cx_1(t) \tag{7.2.17}$$

其中，时刻 T 为滑模面到达时刻，即 $s(T)=0$。显然在滑模控制下系统是稳态无差的，输入通道的干扰将被完全抑制。那么滑模控制是怎么做到的呢?

我们知道在滑模面外 $s\neq 0$，系统是在两个结构之间互相切换的，而在滑模面上 $s=0$，控制率(7.2.5)并没有清晰的给出此时的控制量。关于右边不连续的微分方程的解，Filippov 给出了一个定义和解法，现在这个经典的方法被称为 Filippov 解法。简要的说，在滑模面上的控制量是滑模面两侧控制量的凸组合，该凸组合的系数将保证系统沿着滑模面的切线方向运行，也就是保持 $\dot{s}=0$。此控制量被称为等价控制，可由方程 $\dot{s}=0$ 解得

$$u_{\text{eq}} = -(c+a)\dot{x} - \xi \tag{7.2.18}$$

注意到ξ为未知的干扰量，这个控制输入实际上是无法直接实现的。故滑模控制通过使系统得到一个实际约束情况下无法直接实现的输入控制量，从而达到了干扰的完全抑制。我们将这个特性称为滑模控制的一个内在本质。

(1) 使系统得到一个实际约束情况下无法直接实现的输入控制量。

对上节中所考虑的无干扰系统(7.2.1)，同样我们可以解得系统在滑模面上的等价控制为

$$u_{\text{eq}} = -(c+a)\dot{x} \tag{7.2.19}$$

注意到该等效量里包含了输出量的一阶导数，而在我们的控制结构中并不包含输出量的导数，也没有附加任何的动态系统。也就是说通过滑模控制，我们用静态输出反馈约束下实现了动态反馈控制。

下面给出滑模控制的另一个内在本质。(7.2.15)的滑模控制下系统的闭环结构图如图 7.2.8 所示。

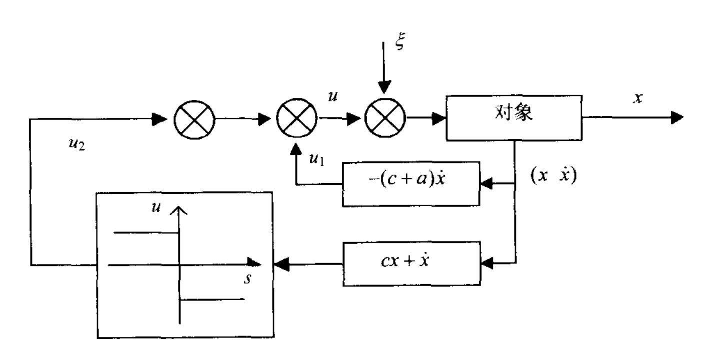


图 7.2.8　滑模控制下系统的闭环结构图

从图 7.2.8 可以看出，系统的输入量由两部分组成，$u_1 = -(c+a)\dot{x}$为连续输入用来改变系统的固有特性，使得闭环系统稳定；$u_2 = -\eta\,\text{sgn}(s)$为不连续输入部分，其作用是抑制系统的干扰，使得系统保持在滑模面$s=0$上运行。由式(7.2.18)可知，不连续输入部分的均值$u_{2\text{av}} = -\xi$，这就意味着开关函数的等效增益为$u_{2\text{av}}/s = -\infty$。这意味着滑模控制等价于常规的状态反馈控制，只是反馈增益k_1和k_2为$-\infty$。而由前面的分析，可知当$k_1 \to \infty$时，干扰对系统稳态输出的影响将为0。而常规的状态反馈是无法实现无穷增益反馈的，因为需要无穷大的控制输入量。故我们可得出滑模控制的另一本质。

(2) 通过有限的输入量实现无穷增益反馈。

从上面这个例子可以看出，滑模控制对系统匹配的干扰和不确定项具有绝对

鲁棒性，即系统的动态特征完全不受匹配的不确定和干扰的影响。EL-Ghezawi 等利用投影算子对滑模控制的绝对鲁棒性给出了几何解释。

将二阶系统(7.2.8)写为

$$\dot{z} = Az + Bu + D\xi \tag{7.2.20}$$

其中，$z = [x\ \dot{x}]^{\mathrm{T}}$， $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$， $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$， $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。滑模面(7.2.19)表示为 $s = Cz$，其中，滑模面参数 $C = [c_1\ 1]$。则由

$$\dot{s} = CAz + CBu + CD\xi = 0 \tag{7.2.21}$$

得系统的滑模动态方程为

$$\dot{z} = \left[I - B(CB)^{-1}C\right]Az + \left[I - B(CB)^{-1}C\right]D\xi \tag{7.2.22}$$

记投影算子 $P = B(CB)^{-1}C$。易知，若 $D \in R[B]$，即满足匹配条件，则有 $D\xi \in N[I-P]$[①]。进一步(7.2.22)可简化为

$$\dot{z} = [I - P]Az \tag{7.2.23}$$

于是知 $z = R[I-P]$。这说明了干扰 $D\xi$ 位于算子 $I-P$ 的零空间内，而滑模动态则位于 $I-P$ 的象空间。这两个空间是整个 R^2 空间的正交补空间。这充分说明了干扰不影响滑模动态，或者说滑模动态对干扰具有不变性，绝对鲁棒性。

注意到这个几何解释是和高增益控制理论的不变子空间一致的。因此我们可以说滑模控制的绝对鲁棒性，是由其内在本质(2)而来的。同样从抵消角度，即采用一个与干扰信号大小一致符号相反的控制输入量来抵消干扰的影响来看，滑模控制的绝对鲁棒性也可说是由其内在本质(1)而来。

事实上，关于滑模控制的本质(1)，已经在观测器的设计(Haskara et al., 1996)、故障检测(Edwards et al., 2000)、基于干扰估计的控制器(El-Ghezawi et al., 1983)等上面有了许多相关的应用。

7.3 匹配不确定时滞系统的滑模控制

7.2 节我们对滑模控制做了一个简要的介绍，很自然地，我们希望能将滑模控制方法的绝对鲁棒性应用到时滞系统上。从这一节开始，我们将逐步深入地探讨时滞系统的滑模控制器的设计问题。

首先，考虑如下状态时滞系统：

---

① 这里 $R[\cdot]$表示参数的象空间，$N[\cdot]$表示参数的零空间。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) + Bu(t) + \xi(x,t) \tag{7.3.1a}$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \tag{7.3.1b}$$

其中，$x \in R^n$ 为状态，$u(t) \in R^m$ 为控制输入，$\xi(x,t)$ 为集中表示的系统的不确定性和外部干扰，$f(t) \in R^n$ 为连续的初值函数，而 A、A_d 和 B 为已知的具有合适维数的常值矩阵，常值时滞 $\tau \geqslant 0$。对系统(7.3.1)作如下假设：

(1) 矩阵对 $(A + A_d, B)$ 是可控的。

(2) $\xi(x,t)$ 满足标准的匹配条件且是有界的，即

$$\xi(x,t) = Bf(x,t) \tag{7.3.2}$$

且

$$\|f(x,t)\| \leqslant \psi(x,t) \tag{7.3.3}$$

其中，$\psi(x,t)$ 是已知的正标量函数。

(3) 时滞常数 τ 已知。

系统(7.3.1)是一个标准的应用滑模控制的系统，系统的干扰和不确定项满足匹配条件。当然与普通系统不同的是，这里多了一个时滞项 $A_d x(t-\tau)$。为了方便设计滑模面，首先需要将系统(7.3.1)转换成标准形式。

引入坐标变换

$$z = Tx = \begin{bmatrix} B^{\perp \mathrm{T}} \\ (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} x \tag{7.3.4}$$

则

$$\dot{z}_1(t) = A_{11}z_1(t) + A_{12}z_2(t) + A_{d11}z_1(t-\tau) + A_{d12}z_2(t-\tau) \tag{7.3.5a}$$

$$\dot{z}_2(t) = A_{21}z_1(t) + A_{22}z_2(t) + A_{d21}z_1(t-\tau) + A_{d22}z_2(t-\tau) + u(t) + f(x,t) \tag{7.3.5b}$$

$$z_1(t) = \varphi_{z1}(t), \quad z_2(t) = \varphi_{z2}(t), \quad t \in [-\tau, 0] \tag{7.3.5c}$$

其中，$z_1 \in R^{n-m}$，$z_2 \in R^m$，$\varphi_{z1}(t) = B^{\perp \mathrm{T}}\varphi(t)$，$\varphi_{z2}(t) = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}\varphi(t)$，$A_{11} = B^{\perp \mathrm{T}}AB^{\perp}$，$A_{12} = B^{\perp \mathrm{T}}AB$，$A_{21} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}AB^{\perp}$，$A_{22} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}AB$，$A_{d11} = B^{\perp \mathrm{T}}A_dB^{\perp}$，$A_{d12} = B^{\perp \mathrm{T}}A_dB$，$A_{d21} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}A_dB^{\perp}$ 和 $A_{d22} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}A_dB$。

定义滑模面函数

$$\sigma(t) = Sz(t) \tag{7.3.6}$$

其中，矩阵 $S \in R^{m\times n}$ 为滑模面参数矩阵。注意到在 z 坐标系下，系统的输入矩阵为 $B_z = [0 \quad I_m]^{\mathrm{T}}$，则不失一般性，在 SB_z 非奇异下，滑模面参数矩阵可写为

$$S = [C \quad I_m] \tag{7.3.7}$$

其中，$C \in R^{m\times(n-m)}$ 为待定参数。当系统保持在滑模面上，即 $s(t) = Cz_1(t) + z_2(t) = 0$ 时，有 $z_2(t) = -Cz_1(t)$。将其代入(7.3.5b)，可得滑动模态系统方程为

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} - A_{12}C)z_1(t) + (A_{d11} - A_{d12}C)z_1(t-\tau) \tag{7.3.8}$$

如前所述，需要设计一个合适的滑模面使得滑动模态稳定。在建立相关结论之前，先给出几个引理。

引理 7.3.1　对任意的具有合适维数的向量 x、y 和正定对称矩阵 X，有如下不等式成立：

$$2x^{\mathrm{T}} y \leqslant x^{\mathrm{T}} X^{-1} x + y^{\mathrm{T}} X y \tag{7.3.9}$$

引理 7.3.2　矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ R^{\mathrm{T}} & S \end{bmatrix} < 0 \tag{7.3.10}$$

等价于

$$S < 0, \qquad Q - RS^{-1}R^{\mathrm{T}} < 0 \tag{7.3.11}$$

或

$$Q < 0, \qquad S - RQ^{-1}R^{\mathrm{T}} < 0 \tag{7.3.12}$$

定理 7.3.1　若存在正定对称矩阵 $Q \in R^{(n-m)\times(n-m)}$、矩阵 $Y \in R^{(n-m)\times m}$ 和正实数 τ^* 满足如下线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} A_{11}Q + A_{d11}Q - A_{12}Y - A_{d12}Y \\ +QA_{11}^{\mathrm{T}} + QA_{d11}^{\mathrm{T}} - Y^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}} - Y^{\mathrm{T}}A_{d12}^{\mathrm{T}} \end{matrix} & QA_{d11}^{\mathrm{T}} - Y^{\mathrm{T}}A_{d12}^{\mathrm{T}} & \begin{matrix} QA_{11}^{\mathrm{T}} + QA_{d11}^{\mathrm{T}} \\ -Y^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}} - Y^{\mathrm{T}}A_{d12}^{\mathrm{T}} \end{matrix} \\ * & -(\tau^*)^{-1}Q & 0 \\ * & 0 & -(\tau^*)^{-1}Q \end{bmatrix} < 0 \tag{7.3.13}$$

那么选择待定参数矩阵 C 为 $C = YQ^{-1}$，则对所有满足 $0 \leqslant \tau \leqslant \tau^*$ 的常值时滞 τ，系统的滑动模态(7.3.8)是渐近稳定的。

证明　定义 $\overline{A}_1 = A_{11} - A_{12}C$ 和 $\overline{A}_{d1} = A_{d11} - A_{d12}C$。考虑如下 Lyapunov-Krasovskii

泛函：

$$V(t)=y_1^{\mathrm{T}}(t)Py_1(t)+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}}P\overline{A}_{d1}z_1(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}\theta \tag{7.3.14}$$

其中 $y_1(t)=z_1(t)+\int_{t-\tau}^{t}\overline{A}_{d1}z_1(w)\mathrm{d}w$， $P\in R^{(n-m)\times(n-m)}$ 是正定对称矩阵。注意到

$$\dot{y}_1(t)=(\overline{A}_1+\overline{A}_{d1})z_1(t) \tag{7.3.15}$$

对(7.3.14)求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&z_1^{\mathrm{T}}(t)[P(\overline{A}_1+\overline{A}_{d1})+(\overline{A}_1^{\mathrm{T}}+\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}})P+\tau(\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}}P\overline{A}_{d1})]z_1(t)\\&+2\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}}P(\overline{A}_1+\overline{A}_{d1})z_1(t)\mathrm{d}w-\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}}P\overline{A}_{d1}z_1(w)\mathrm{d}w\end{aligned} \tag{7.3.16}$$

由引理 7.3.1，可得

$$\begin{aligned}&2\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}}P(\overline{A}_1+\overline{A}_{d1})z_1(t)\mathrm{d}w\\&\leqslant\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}}P\overline{A}_{d1}z_1(w)\mathrm{d}w+\tau[z_1^{\mathrm{T}}(t)(\overline{A}_1^{\mathrm{T}}+\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}})PP^{-1}P(\overline{A}_1+\overline{A}_{d1})z_1(t)]\end{aligned} \tag{7.3.17}$$

代入(7.3.16)，即有

$$\dot{V}(t)\leqslant z_1^{\mathrm{T}}(t)Mz_1(t) \tag{7.3.18}$$

其中

$$\begin{aligned}M=&P(\overline{A}_1+\overline{A}_{d1})+(\overline{A}_1^{\mathrm{T}}+\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}})P+\tau(\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}}P\overline{A}_{d1})\\&+\tau(\overline{A}_1^{\mathrm{T}}+\overline{A}_{d1}^{\mathrm{T}})P(\overline{A}_1+\overline{A}_{d1})\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

由式(7.3.11)可知，若存在正实数 τ^*、矩阵 C 和正定对称矩阵 P 使得 $M<0$，那么存在滑模面(7.3.6)使得对一切常值时滞参数 $0\leqslant\tau\leqslant\tau^*$ 系统是滑动模态稳定的。

定义 $Q=P^{-1}$ 和 $Y=CQ$。又，$M<0$ 等价于

$$\begin{aligned}&A_{11}Q+A_{d11}Q-A_{12}Y-A_{d12}Y+QA_{11}^{\mathrm{T}}+QA_{d11}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{d12}^{\mathrm{T}}\\&+\tau^*(QA_{d11}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{d12})Q^{-1}(A_{d11}Q-A_{d12}Y)\\&+\tau^*(QA_{11}^{\mathrm{T}}+QA_{d11}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{d12}^{\mathrm{T}})Q^{-1}(A_{11}Q+A_{d11}Q-A_{12}Y-A_{d12}Y)<0\end{aligned} \tag{7.3.20}$$

而由引理 7.3.2 可知，不等式(7.3.20)成立等价于线性矩阵不等式(7.3.13)成立。证毕。

注 7.3.1 当系统的时滞已知时，通过 LMI-tools，可以直接求解线性矩阵不等式(7.3.13)(此时 τ^* 是已知系统时滞)来验证滑模面的存在问题。进一步由(7.3.20)

可以看出，当系统无时滞，即时滞参数$\tau=0$时，系统的滑模面总是存在的。此时，由于

$$(A+A_d,B)\text{可控} \Rightarrow (A_{11}+A_{d11},A_{12}+A_{d12})\text{可控} \tag{7.3.21}$$

可知，不等式

$$(A_{11}+A_{d11})Q-(A_{12}+A_{d12})Y+Q(A_{11}^{\mathrm{T}}+A_{d11}^{\mathrm{T}})-Y^{\mathrm{T}}(A_{12}^{\mathrm{T}}+A_{d12}^{\mathrm{T}})<0 \tag{7.3.22}$$

总是有可行解的。另外，已知当$\tau\uparrow$时，不等式(7.3.20)的可行解集将缩小，故通过二分尝试法，可以得到最大容许的时滞参数

$$\tau^{**}=\max(\tau^{*}),\quad \text{subject to (7.3.13)} \tag{7.3.23}$$

确定滑模面以后，需要设计控制律使得系统滑模面有限时间稳定。存在许多方法来综合控制律，如我国学者高为炳的趋近率方法，Decarlo 等的扩展等效控制法，Balestrino 等的单位向量方法。下面，我们将基于单位向量法给出时滞系统的滑模控制律。

定理 7.3.2 对时滞系统(7.3.5)，其滑模面由(7.3.6)和(7.3.7)定义，则在如下控制律：

$$u(t)=-S\bar{A}z(t)-S\bar{A}_dz(t-\tau)-(\psi(x,t)+\eta_1)\sigma/\|\sigma\| \tag{7.3.24}$$

作用下，系统是滑模面有限时间稳定的，即系统轨迹将在有限时间内到达滑模面然后并保持于其上。其中$\eta_1>0$为标量，用来调整滑模面的趋近速度。

证明 z坐标系下滑模面函数系统的动态方程为

$$\dot{\sigma}(t)=S\bar{A}z(t)+S\bar{A}_dz(t-\tau)+u(t)+f(x,t) \tag{7.3.25}$$

考虑 Lyapunov 函数$V=0.5\sigma^{\mathrm{T}}\sigma$，其沿着系统(7.3.25)对时间的导数为

$$\dot{V}=\sigma^{\mathrm{T}}\left(S\bar{A}z(t)+S\bar{A}_dz(t-\tau)+u(t)+f(x,t)\right) \tag{7.3.26}$$

将控制律(7.3.24)代入式(7.3.26)，并注意假设条件(2)，有

$$\dot{V}\leqslant-\eta_1\|\sigma\| \tag{7.3.27}$$

这表明了系统轨迹将在有限时间内到达并保持在滑模面上。证毕。

从定理 7.3.2 可以看出，若时滞参数是已知的，一旦确定了滑模面，时滞系统的综合问题可以较为简单地直接推出，而滑模面的存在与否，这里是不等式(7.3.13)的可行性问题，是依赖于系统的时滞参数的，这是通常所说的时滞依赖的情况。

容易发现，定理 7.3.1 结论具有较大保守性，这主要是来自不等式(7.3.17)在

应用引理 7.3.1 时将(7.3.9)中可选的正定对称矩阵固定为 P。这样带来的保守性有多大呢？我们来观察一个特殊的情况。当矩阵 A_d 满足匹配条件，即在 z 坐标系下 $\overline{A}_{d1}=0$ 时，系统的滑动模态将完全与时滞无关，为

$$\dot{z}_1(t)=(A_{11}-A_{12}C)z_1(t) \tag{7.3.28}$$

由假设条件(1)和 A_d 满足匹配条件，可知矩阵对 (A_{11},A_{12}) 可控，所以总是存在矩阵 C 使得系统(7.3.28)是渐近稳定的。即无论系统的时滞多大，均可以用滑模控制来镇定系统。然而，当 $\overline{A}_{d1}=0$ 时，应用定理 7.3.1，我们将得到

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} A_{11}Q+A_{d11}Q-A_{12}Y-A_{d12}Y \\ +QA_{11}^{\mathrm{T}}+QA_{d11}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{d12}^{\mathrm{T}} \end{matrix} & QA_{11}^{\mathrm{T}}+QA_{d11}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}}-Y^{\mathrm{T}}A_{d12}^{\mathrm{T}} \\ * & -(\tau^*)^{-1}Q \end{bmatrix}<0 \tag{7.3.29}$$

显然由定理 7.3.1，对匹配的时滞情况，其保守性大大限制了容许的时滞参数。

正是由于现有的工具和方法对时滞依赖的求解都会代入很大的保守性，因此与时滞依赖对立的时滞无关的结论也是时滞系统研究的一个重要方面，下面我们将给出系统(7.3.1)的时滞无关的滑模控制结论。此时，我们需要引入另一个假设来代替原先的假设条件(1)、(4)，矩阵对 (A,B) 是可控的。

定理 7.3.3　对满足假设条件(2)的系统(7.3.5)，若如下存在正定对称矩阵 $X,W\in R^{(n-m)\times(n-m)}$ 和矩阵 $Y\in R^{m\times(n-m)}$ 使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} A_{11}X+A_{11}^{\mathrm{T}}X+A_{12}Y+Y^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}}+W & A_{d11}X+A_{d12}Y \\ (A_{d11}X+A_{d12}Y)^{\mathrm{T}} & -W \end{bmatrix}<0 \tag{7.3.30}$$

且滑模面参数选为 $C=YX^{-1}$，则系统的滑动模态是渐近稳定的。

证明　系统的滑动模态方程是不变的，仍为(7.3.8)。对系统(7.3.8)考虑如下的 Lyapunov -Krasovaskii 泛函：

$$V(t)=z_1^{\mathrm{T}}Pz+\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)Qz_1(w)\mathrm{d}w \tag{7.3.31}$$

其中，$P,Q\in R^{(n-m)\times(n-m)}$ 为正定对称矩阵。V 沿着系统(7.3.8)对时间的导数为

$$\dot{V}(t)=z_1^{\mathrm{T}}(P\overline{A}_1+A_1^{\mathrm{T}}P)z+2z_1^{\mathrm{T}}P\overline{A}_{d1}z_1(t-\tau)+z_1^{\mathrm{T}}(t)Qz_1(t)-z_1^{\mathrm{T}}(t-\tau)Qz_1(t-\tau) \tag{7.3.32}$$

定义

$$M=\begin{bmatrix} P\bar{A}_1+A_1^{\mathrm{T}}P+Q & P\bar{A}_{d1} \\ \bar{A}_{d1}^{\mathrm{T}}P & -Q \end{bmatrix} \tag{7.3.33}$$

则有

$$\dot{V}=\begin{bmatrix} z_1^{\mathrm{T}}(t) & z_1^{\mathrm{T}}(t-\tau) \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_1(t-\tau) \end{bmatrix} \tag{7.3.34}$$

若 $M<0$，则系统的滑动模态是渐近稳定的，而 $M<0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}<0 \tag{7.3.35}$$

对任一非奇异对称矩阵 $X\in R^{(n-m)\times(n-m)}$ 。定义 $X=P^{-1}$ 、$Y=CX$ 和 $W=XQX$ ，直接计算不等式(7.3.35)可得不等式(7.3.29)。这表明了所设计的滑模面下，系统滑动模态稳定。证毕。

注 7.3.2　定理 7.3.3 给出了对时滞系统滑模面存在的时滞无关条件，线性矩阵不等式(7.3.32)的可行性完全与系统的时滞无关，即任何时滞下，若式(7.3.30)是可行的，那么该时滞系统必存在滑模面其上的滑动模态是渐近稳定的。从式(7.3.34)可以看出，系统当前状态 $z_1(t)$ 和时滞状态 $z_1(t-\tau)$ 被当成了互不相关的量来处理。这种处理方法一般情况下，认为比时滞依赖有更大的保守性。但考虑到 A_d 满足匹配条件时，如前所述，时滞依赖的情况下，所得到的容许时滞是有上界的，而时滞无关时，　$\bar{A}_{d1}=0$ ，显然线性矩阵不等式(7.3.30)是可行的，时滞系统的滑模面总是存在的。因此时滞无关和时滞依赖在时滞滑模控制中，是两种不同角度的设计方法，互相之间保守性的大小是无法比较的。

若系统的时滞参数是已知的，我们可以从时滞无关和时滞依赖两个角度来设计滑模面，但系统时滞参数是未知时，滑模面只能从时滞无关角度来设计，相应的控制律综合问题也必须采用时滞无关的方法，定理 7.3.2 提供的控制律显然不再适用。

定理 7.3.4　对时滞系统(7.3.5)，其滑模面设定为(7.3.6)，若其时滞参数是未知但有界的，满足 $\tau\in[0\quad\tau_{\max}]$ ，其中 $\tau_{\max}$ 是已知的正实数，则在如下控制律：

$$u(t)=-S\bar{A}z(t)-\left(\left\|S\bar{A}_d\right\|\gamma(t)+\psi(x,t)+\eta_1\right)\sigma/\|\sigma\| \tag{7.3.36}$$

作用下，系统是滑模面有限时间稳定的，其中非负标量函数 $\gamma(t)$ 为

$$\gamma(t)=\left\|z_1(t-\tau)\right\|_{\max},\qquad \tau\in[0\quad\tau_{\max}] \tag{7.3.37}$$

证明　z 坐标系下滑模面函数系统的动态方程为

$$\dot{\sigma}(t)=S\bar{A}z(t)+S\bar{A}_d z(t-\tau)+u(t)+f(x,t) \tag{7.3.38}$$

考虑 Lyapunov 函数 $V=0.5\sigma^{\mathrm{T}}\sigma$，其沿着系统(7.3.38)对时间的导数为

$$\dot{V}=\sigma^{\mathrm{T}}\left(S\bar{A}z(t)+S\bar{A}_d z(t-\tau)+u(t)+f(x,t)\right) \tag{7.3.39}$$

将控制律(7.3.24)代入式(7.3.39)，并注意假设条件(2)，有

$$\dot{V}\leqslant\|\sigma\|\|S\bar{A}_d\|\|z(t-\tau)\|+\|\sigma\|\psi(x,t)-\left(\|S\bar{A}_d\|\gamma(t)+\psi(x,t)+\eta_1\right)\sigma^{\mathrm{T}}\sigma/\|\sigma\| \tag{7.3.40}$$

即

$$\dot{V}\leqslant-\eta_1\|\sigma\| \tag{7.3.41}$$

这表明了系统轨迹将在有限时间内到达并保持在滑模面上。证毕。

7.4　非匹配不确定时滞系统的滑模控制

7.3 节我们详细阐述了匹配不确定时滞系统的滑模控制器的设计方法，在实际系统中，除了来自输入通道的外部干扰，系统内部参数和内部干扰也总是存在的且有时是不可忽略的。这些不确定一般是不能归结到或转换为输入通道的外部不确定输入，这就需要探索和寻找非匹配不确定时滞系统的滑模控制的设计方案。

考虑如下系统：

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)+(A_d+\Delta A_d(t))x(t-\tau)+Bu(t)+\xi(x,t) \tag{7.4.1}$$

$$x(t)=\phi(t),\quad t\in[-\tau,0]$$

其中，$x\in R^n$ 为状态，$u\in R^m$ 为控制输入，$\xi(x,t)$ 为集中表示的系统的不确定性和外部干扰，$\phi(t)\in R^n$ 为连续的初值函数，而 A、A_d 和 B 为已知的具有合适维数的常值矩阵，常值时滞 $\tau\geqslant0$，$\Delta A(t)$ 和 ΔA_d 为不确定的系统参数矩阵。对系统(7.3.1)作如下假设：

(1) $\xi(x,t)$ 满足标准的匹配条件且是有界的，即

$$\xi(x,t)=Bf(x,t) \tag{7.4.2}$$

且

$$\|f(x,t)\|\leqslant\psi(x,t) \tag{7.4.3}$$

其中，$\psi(x,t)$ 是已知的正标量函数。

(2) 不确定的系统参数矩阵可以分别表示为 $\Delta A(t)=HF(t)E$ 和 $\Delta A_d(t)=H_dF_d(t)E_d$。其中 H 、E 、H_d 和 E_d 是已知的具有合适维数的常矩阵，$F(t)$ 和 $F_d(t)$ 是未知但有界的时变矩阵函数，满足 $\|F(t)\|\leqslant 1$ 和 $\|F_d(t)\|\leqslant 1$。

我们首先介绍两个引理

引理 7.4.1(Boyd et al., 1994)　对任意满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$ 的适当维数矩阵 F ，有

$$2x^{\mathrm{T}}DFEy\leqslant \varepsilon x^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}x+\varepsilon^{-1}y^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Ey \tag{7.4.4}$$

对任意向量 $x\in R^p$ ，$y\in R^q$ 和常数 $\varepsilon>0$ 成立，其中 D 和 E 是具有适当维数的常数矩阵。

引理 7.4.2(Utkin, 1992)　不等式

$$B^{\perp\mathrm{T}}GB^{\perp}<0 \tag{7.4.5}$$

等价于

$$G-\mu BB^{\mathrm{T}}<0,\qquad \mu\in R \tag{7.4.6}$$

这一节，我们将采用另一种滑模面的设计方法，滑模面定义为

$$\sigma=Sx=B^{\mathrm{T}}X^{-1}x=0 \tag{7.4.7}$$

其中，$S\in R^{m\times n}$ 为滑模面参数矩阵，$X\in R^{n\times n}$ 是待定的正定对称矩阵。引入如下坐标变换矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} B^{\perp\mathrm{T}} \\ S \end{bmatrix} \tag{7.4.8}$$

其逆矩阵为$T^{-1}=\begin{bmatrix} XB^{\perp}(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1} & B(B^{\mathrm{T}}X^{-1}B)^{-1}\end{bmatrix}$。由坐标变换 $z\mapsto Tx$,系统(7.4.1)可写为

$$\dot{z}(t)=(\hat{A}_0+\Delta\hat{A}_0)z(t)+(\hat{A}_d+\Delta\hat{A}_d)z(t-\tau)+\hat{B}(u(t)+f(x,t)),\quad t>0 \tag{7.4.9a}$$

$$z(t)=\hat{\phi}(t),\qquad t\in[-\tau\quad 0] \tag{7.4.9b}$$

其中

$$\hat{A}_0+\Delta\hat{A}_0=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}B^{\perp T}(A_0+\Delta A_0)XB^{\perp}(B^{\perp T}XB)^{-1} & B^{\perp T}(A_0+\Delta A_0)B(SB)^{-1}\\ S(A_0+\Delta A_0)XB^{\perp}(B^{\perp T}XB)^{-1} & S(A_0+\Delta A_0)B(SB)^{-1}\end{bmatrix} \quad (7.4.10)$$

$$\hat{A}_d+\Delta\hat{A}_d=\begin{bmatrix}\overline{A}_{d11} & \overline{A}_{d12}\\ \overline{A}_{d21} & \overline{A}_{d22}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}B^{\perp T}(A_d+\Delta A_d)XB^{\perp}(B^{\perp T}XB^{\perp})^{-1} & B^{\perp T}(A_d+\Delta A_d)B(SB)^{-1}\\ S(A_d+\Delta A_d)XB^{\perp}(B^{\perp T}XB^{\perp})^{-1} & S(A_d+\Delta A_d)B(SB)^{-1}\end{bmatrix}$$
$$(7.4.11)$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix}0\\ SB\end{bmatrix} \quad (7.4.12)$$

将向量 $z(t)$ 分块为 $z^{\mathrm{T}}(t)=\begin{bmatrix}z_1^{\mathrm{T}}(t) & z_2^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}$，其中 $z_1(t)\in R^{(n-m)}$， $z_2(t)\in R^m$ 。注意到 $z_2(t)=\sigma(t)$，故由 $\sigma=0$ 可得系统的滑动模态系统为

$$\dot{z}_1(t)=\overline{A}_{11}z_1(t)+\overline{A}_{d11}z_1(t-\tau) \quad (7.4.13)$$

控制器设计的目标是寻找合适的 X 使得系统(7.4.13)对一切允许的时变非匹配不确定 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta A_d(t)$ 是渐近稳定的，并设计合适的控制律使得滑模面系统是有限时间稳定的。同样，我们的结论也将分成时滞依赖和时滞无关两种。

7.4.1 时滞依赖

在时滞依赖情况下，系统的时滞参数是已知，另外还需要如下假设条件：

(3) 矩阵对 (A_0+A_d,B) 是可控的。

定理 7.4.1 若存在正定对称矩阵 X 、正标量 ξ 和 β_i ($i\in\{1,2,3,4,5\}$)、时滞参数 τ 使得如下优化问题有解：

$$\tau^*=\max(\tau)$$

Subject to:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}\tau^{-1}((A_0+A_d)X+\\ X(A_0+A_d)^{\mathrm{T}}+\beta_1 HH^{\mathrm{T}}\\ +\beta_2 H_d H_d^{\mathrm{T}}-\xi BB^{\mathrm{T}}))\end{matrix} & XE^{\mathrm{T}} & XE_d^{\mathrm{T}} & XE_d^{\mathrm{T}} & XE_d^{\mathrm{T}} & XE^{\mathrm{T}} & XA_d^{\mathrm{T}} & X(A+A_d)^{\mathrm{T}} \\ E\ X & -\beta_1\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_d X & 0 & -\beta_2\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_d X & 0 & 0 & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_d X & 0 & 0 & 0 & -\beta_4 & 0 & 0 & 0 \\ E\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_5 & 0 & 0 \\ A_d X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}-X-\xi BB^{\mathrm{T}}\\ +\beta_3 H_d H_d^{\mathrm{T}}\end{matrix} & 0 \\ (A+A_d)X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}-X-\xi BB^{\mathrm{T}}\\ +\beta_4 H_d H_d^{\mathrm{T}}+\beta_5 HH^{\mathrm{T}}\end{matrix} \end{bmatrix} < 0$$

(7.4.14)

且相应的滑模面设计为(7.4.7)，则滑动模态系统(7.4.13)对任意允许的不确定是渐近稳定的。

证明 定义 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(t)=y^{\mathrm{T}}(t)Py(t)+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t} z_1^{\mathrm{T}}(w)\bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}}P\bar{A}_{d11}z_1(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}\theta \tag{7.4.15}$$

其中，$y(t)=z_1(t)+\int_{t-\tau}^{t}\bar{A}_{d11}z_1(w)\mathrm{d}w$，$P$ 是正定对称矩阵。对 $V(t)$ 沿着系统(7.4.13)求导，并注意到 $\dot{y}(t)=(\bar{A}_{11}+\bar{A}_{d11})z_1(t)$，得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&2\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}}P(\bar{A}_{11}+\bar{A}_{d11})z_1(t)\mathrm{d}w-\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}}P\bar{A}_{d11}z_1(w)\mathrm{d}w\\ &+z_1^{\mathrm{T}}(t)[P(\bar{A}_{11}+\bar{A}_{d11})+(\bar{A}_{11}^{\mathrm{T}}+\bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}})P+\tau(\bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}}P\bar{A}_{d11})]z_1(t)\end{aligned} \tag{7.4.16}$$

由引理 7.3.1，对任意的合适维数的正定对称矩阵 Q，有如下不等式成立：

$$\begin{aligned}&2\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}}P(\bar{A}_{11}+\bar{A}_{d11})z_1(t)\mathrm{d}w\\ \leqslant&\int_{t-\tau}^{t}z_1^{\mathrm{T}}(w)\bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}}Q\bar{A}_{d11}z_1(w)\mathrm{d}w+\tau[z_1^{\mathrm{T}}(t)(\bar{A}_{11}^{\mathrm{T}}+\bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}})PQ^{-1}P(\bar{A}_{11}+\bar{A}_{d11})z_1(t)]\end{aligned} \tag{7.4.17}$$

选择 $Q=P$ 并代入式(7.4.16)，得

$$\dot{V}(t)\leqslant z_1^{\mathrm{T}}(t)Wz_1(t) \tag{7.4.18}$$

其中

$$W = P(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{d11}) + (\bar{A}_{11}^{\mathrm{T}} + \bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}})P + \tau\{(\bar{A}_{11}^{\mathrm{T}} + \bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}})P(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{d11}) + \bar{A}_{d11}^{\mathrm{T}}P\bar{A}_{d11}\} \tag{7.4.19}$$

由 Lyapunov 稳定性定理，易知，所证即证 $W<0$。

选择 $P=(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1}$，然后不等式 $W<0$ 两边同时乘以 P，并由引理 7.3.2，可推得不等式 $W<0$ 等价于如下不等式：

$$L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \tau^{-1}(DX+XD^{\mathrm{T}}) & XG^{\mathrm{T}} & XD^{\mathrm{T}} \\ GX & -X & 0 \\ DX & 0 & -X \end{bmatrix}L<0 \tag{7.4.20}$$

其中，$L=\begin{bmatrix} B^{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & B^{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & B^{\perp} \end{bmatrix}$，$D=A+A_d+\Delta A+\Delta A_d$，$G=A_d+\Delta A_d$。由引理 7.4.2，不等式(7.4.20)又等价于

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1}(DX+XD^{\mathrm{T}})-\xi BB^{\mathrm{T}} & XG^{\mathrm{T}} & XD^{\mathrm{T}} \\ GX & -X-\xi BB^{\mathrm{T}} & 0 \\ DX & 0 & -X-\xi BB^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}<0 \tag{7.4.21}$$

其中,ξ 为一合适的正实数。记 M 为不等式(7.4.21)的左半部分，那么展开 M 有

$$\begin{aligned} M = &\begin{bmatrix} \begin{matrix}\tau^{-1}(A_0+A_d)X \\ +\tau^{-1}X(A_0+A_d)^{\mathrm{T}}-\xi BB^{\mathrm{T}}\end{matrix} & XA_d^{\mathrm{T}} & X(A_0+A_d)^{\mathrm{T}} \\ A_dX & -X-\xi BB^{\mathrm{T}} & 0 \\ (A_0+A_d)X & 0 & -X-\xi BB^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \\ &+\tau^{-1}D_1HF(t)EXD_1^{\mathrm{T}}+\tau^{-1}D_1X(HF(t)E)^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}} \\ &+\tau^{-1}D_1H_dF_d(t)E_dXD_1^{\mathrm{T}}+\tau^{-1}D_1X(H_dF_d(t)E_d)^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}}+D_2H_dF_d(t)E_dXD_1^{\mathrm{T}} \\ &+D_1X(H_dF_d(t)E_d)^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}}+D_3H_dF_d(t)E_dXD_1^{\mathrm{T}}+D_1X(H_dF_d(t)E_d)^{\mathrm{T}}D_3^{\mathrm{T}} \\ &+D_3HF(t)EXD_1^{\mathrm{T}}+D_1X(HF(t)E)^{\mathrm{T}}D_3^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{7.4.22}$$

其中，$D_1^{\mathrm{T}}=[I\quad 0\quad 0]$，$D_2^{\mathrm{T}}=[0\quad I\quad 0]$，$D_3^{\mathrm{T}}=[0\quad 0\quad I]$。由引理 7.4.1，式(7.4.22)中的不确定项满足

$$\begin{aligned} &\tau^{-1}D_1HF(t)EXD_1^{\mathrm{T}}+\tau^{-1}D_1X(HF(t)E)^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}} \\ &\qquad\leqslant \tau^{-1}(\beta_1D_1HH^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}}+\beta_1^{-1}D_1XE^{\mathrm{T}}EXD_1^{\mathrm{T}}) \end{aligned} \tag{7.4.23}$$

$$\tau^{-1}D_1H_dF_d(t)E_dXD_1^{\mathrm{T}}+\tau^{-1}D_1X(H_dF_d(t)E_d)^{\mathrm{T}}D_1^{\mathrm{T}}\leqslant\tau^{-1}(\beta_2D_1H_dH_d^{\mathrm{T}}H_1^{\mathrm{T}}+\beta_2^{-1}D_1XE_d^{\mathrm{T}}E_dXD_1^{\mathrm{T}}) \tag{7.4.24}$$

$$D_2H_dF_d(t)E_dXD_1^{\mathrm{T}}+D_1X(H_dF_d(t)E_d)^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}}\leqslant\beta_3D_2H_dH_d^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}}+\beta_3^{-1}D_1XE_d^{\mathrm{T}}E_dXD_1^{\mathrm{T}} \tag{7.4.25}$$

$$D_3H_dF_d(t)E_dXD_1^{\mathrm{T}}+D_1X(H_dF_d(t)E_d)^{\mathrm{T}}D_3^{\mathrm{T}}\leqslant\beta_4D_3H_dH_d^{\mathrm{T}}D_3^{\mathrm{T}}+\beta_4^{-1}D_1XE_d^{\mathrm{T}}E_dXD_1^{\mathrm{T}} \tag{7.4.26}$$

$$D_3HF(t)EXD_1^{\mathrm{T}}+D_1X(HF(t)E)^{\mathrm{T}}D_3^{\mathrm{T}}\leqslant\beta_5D_3HH^{\mathrm{T}}D_3^{\mathrm{T}}+\beta_5^{-1}D_1XE^{\mathrm{T}}EXD_1^{\mathrm{T}} \tag{7.4.27}$$

由此可得矩阵 M 的上界为

$$M\leqslant\begin{bmatrix}\tau^{-1}\left(N_1X+XN_1^{\mathrm{T}}+N_2\right)-\xi BB^{\mathrm{T}}+N_5 & XA_d^{\mathrm{T}} & XN_1^{\mathrm{T}}\\ A_dX & -X-\xi BB^{\mathrm{T}}+N_3 & 0\\ N_1X & 0 & -X-\xi BB^{\mathrm{T}}+N_4\end{bmatrix} \tag{7.4.28}$$

其中

$$\begin{aligned}&N_1=A+A_d\\&N_2=\beta_1HH^{\mathrm{T}}+\beta_2H_dH_d^{\mathrm{T}}+\beta_1^{-1}XE^{\mathrm{T}}EX+\beta_2^{-1}XE_d^{\mathrm{T}}E_dX\\&N_3=\beta_3H_dH_d^{\mathrm{T}}\\&N_4=\beta_4H_dH_d^{\mathrm{T}}+\beta_5HH^{\mathrm{T}}\\&N_5=\beta_3^{-1}XE_d^{\mathrm{T}}E_dX+\beta_4^{-1}XE_d^{\mathrm{T}}E_dX+\beta_5^{-1}XE^{\mathrm{T}}EX\end{aligned}$$

由引理 7.3.2，不等式(7.4.12)意味着(7.4.28)的右半部分是负定的，这表明了 $W<0$，即系统的滑动模态是渐近稳定的。证毕。

在滑模面确定以后，需要综合控制律来实现滑模面函数的有限时间稳定，在时滞已知的情况下，类似于定理 7.3.2，我们可以得出如下结论。

定理 7.4.2　若选择如下控制律：

$$u(t)=-(SB)^{-1}\left(SAx(t)+SA_d(x-\tau)+\eta_1\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right) \tag{7.4.29}$$

则时滞不确定系统(7.4.1)将在有限时间内到达并保持在滑模面 $\sigma(t)=Sx(t)=0$ 上，其中 $\eta_1=\|SH\|\|E\|\|x(t)\|+\|SH_d\|\|E_d\|\|x(t-\tau)\|+\psi(x,t)+\eta$。

证明　由 $\sigma^{\mathrm{T}}S\Delta A(t)x(t) \leqslant \|\sigma\|\|SH\|\|E\|\|x(t)\|$ 和 $\sigma^{\mathrm{T}}S\Delta A_d(t)x(t) \leqslant \|\sigma\|\|SH_d\|\|E_d\| \cdot \|x(t)\|$ 可以很容易地得出上述结论，这里就不加以详细证明。

7.4.2 时滞无关

当系统的时滞参数是未知有界的，但此界限内并不是所有的时滞参数系统都存在时滞依赖的滑模面，此时我们常常需要尝试寻找时滞无关的结论。一个必要的假设条件是：

(4) 矩阵对 (A, B) 是可控的。

定理 7.4.3　如果存在正定对称矩阵 $Q, X \in R^{n\times n}$ 和正实数 α_1, α_2, ξ 使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} AX + XA^{\mathrm{T}} + Q + \\ \alpha_1 HH^{\mathrm{T}} + \alpha_2 H_d H_d^{\mathrm{T}} - \xi BB^{\mathrm{T}} \end{matrix} & XE^{\mathrm{T}} & XE_d^{\mathrm{T}} & A_d X \\ EX & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ E_d X & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ XA_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{7.4.30}$$

则滑模面

$$\sigma(t) = B^{\mathrm{T}} X^{-1} x = 0 \tag{7.4.31}$$

所导致的滑动模态系统是渐近稳定的。

证明　由前面的叙述可知，滑模面(7.4.31)所导致的滑动模态系统方程为(7.4.13)。定义如下的 Lyapunov-Krasovaskii 泛函：

$$V(t) = z_1^{\mathrm{T}} P z_1 + \int_{t-\tau}^{t} z_1^{\mathrm{T}}(w)(\alpha_2^{-1} PB^{\perp\mathrm{T}} XE_d^{\mathrm{T}} E_d XB^{\perp} P + PB^{\perp\mathrm{T}} QB^{\perp} P) z_1(w)\mathrm{d}w \tag{7.4.32}$$

其中，$P \in R^{(n-m)\times(n-m)}$ 为正定对称矩阵。其沿着系统(7.4.13)对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_1^{\mathrm{T}}(P\overline{A}_{11} + \overline{A}_{11}^{\mathrm{T}} P + \alpha_2^{-1} PB^{\perp\mathrm{T}} XE_d^{\mathrm{T}} E_d XB^{\perp} P + PB^{\perp\mathrm{T}} QB^{\perp} P) z_1 \\ &\quad + 2z_1^{\mathrm{T}} P\overline{A}_{d11} z_1(t-\tau) - z_1^{\mathrm{T}}(t-\tau)(\alpha_2^{-1} PB^{\perp\mathrm{T}} XE_d^{\mathrm{T}} E_d XB^{\perp} P + PB^{\perp\mathrm{T}} QB^{\perp} P) z_1(t-\tau) \end{aligned} \tag{7.4.33}$$

利用引理 7.3.2，我们可得

$$\begin{aligned} & 2z_1^{\mathrm{T}} PB^{\perp\mathrm{T}} HF(t) EXB^{\perp\mathrm{T}} (B^{\perp\mathrm{T}} XB^{\perp})^{-1} z_1 \\ & \leqslant z_1^{\mathrm{T}} (\alpha_1 PB^{\perp\mathrm{T}} HH^{\mathrm{T}} B^{\perp} P + \alpha_1^{-1} (B^{\perp\mathrm{T}} XB^{\perp})^{-1} B^{\perp\mathrm{T}} XE^{\mathrm{T}} EXB^{\perp} (B^{\perp\mathrm{T}} XB^{\perp})^{-1}) z_1 \end{aligned} \tag{7.4.34}$$

$$2z_1^{\mathrm{T}}PB^{\perp\mathrm{T}}H_dF_d(t)E_dXB^{\perp\mathrm{T}}(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1}z_1(t-\tau)\leqslant\alpha_2z_1^{\mathrm{T}}PB^{\perp\mathrm{T}}H_dH_d^{\mathrm{T}}B^{\perp}Pz_1$$
$$+\alpha_2^{-1}z_1^{\mathrm{T}}(t-\tau)(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1}B^{\perp\mathrm{T}}XE_d^{\mathrm{T}}E_dXB^{\perp}(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1})z_1(t-\tau) \tag{7.4.35}$$

其中，α_1, α_2为正标量。同时由引理 7.3.1，有

$$2z_1^{\mathrm{T}}(t)PB^{\perp\mathrm{T}}A_dXB^{\perp\mathrm{T}}(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1}z_1(t-\tau)\leqslant z_1^{\mathrm{T}}(t)PB^{\perp\mathrm{T}}A_dXQ^{-1}XA_d^{\mathrm{T}}B^{\perp}Pz_1(t)$$
$$+z_1^{\mathrm{T}}(t-\tau)(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1}B^{\perp\mathrm{T}}QB^{\perp}(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1}z_1(t-\tau) \tag{7.4.36}$$

设定 $P=(B^{\perp\mathrm{T}}XB^{\perp})^{-1}$，由(7.4.33)~(7.4.36)，可得如下不等式：

$$\dot V\leqslant z_1^{\mathrm{T}}Wz_1 \tag{7.4.37}$$

其中

$$\begin{aligned}W=&PB^{\perp\mathrm{T}}(AX+XA^{\mathrm{T}})B^{\perp}P+\alpha_1PB^{\perp\mathrm{T}}HH^{\mathrm{T}}B^{\perp}P\\&+\alpha_1^{-1}PB^{\perp\mathrm{T}}XE^{\mathrm{T}}EXB^{\perp}P+\alpha_2^{-1}PB^{\perp\mathrm{T}}XE_d^{\mathrm{T}}E_dXB^{\perp}P\\&+\alpha_2PB^{\perp\mathrm{T}}H_dH_d^{\mathrm{T}}B^{\perp}P+PB^{\perp\mathrm{T}}A_dXQ^{-1}XA_d^{\mathrm{T}}B^{\perp}P+PB^{\perp\mathrm{T}}QB^{\perp}P\end{aligned} \tag{7.4.38}$$

若不等式$W<0$成立，那么滑动模态是渐近稳定的。同时矩阵P是可逆的，故不等式$W<0$等价于不等式$P^{-1}WP^{-1}<0$，即

$$\begin{aligned}B^{\perp\mathrm{T}}\Big(&AX+XA^{\mathrm{T}\perp}+\alpha_1HH^{\mathrm{T}}+\alpha_1^{-1}XE^{\mathrm{T}}EX\\&+\alpha_2^{-1}XE_d^{\mathrm{T}}E_dX+\alpha_2H_dH_d^{\mathrm{T}}+A_dXQ^{-1}XA_d^{\mathrm{T}}+Q\Big)B^{\perp}<0\end{aligned} \tag{7.4.39}$$

由引理 7.4.2，式(7.4.39)等价于，存在一个正实数ξ使得

$$\begin{aligned}&AX+XA^{\mathrm{T}}+a_1HH^{\mathrm{T}}+a_1^{-1}XE^{\mathrm{T}}EX+a_2H_dH_d^{\mathrm{T}}\\&+a_2^{-1}XE_d^{\mathrm{T}}E_dX+A_dXQ^{-1}XA_d^{\mathrm{T}}+Q-\xi BB^{\mathrm{T}}<0\end{aligned} \tag{7.4.40}$$

进一步，由引理 7.3.2 可知，线性矩阵不等式(7.4.30)意味着不等式(7.4.40)成立，这说明了系统的滑动模态是渐近稳定的。证毕。

同时滞依赖类似，我们不加证明地给出如下时滞无关情况的控制律：

定理 7.4.4 对时滞系统(7.4.1)，滑模面为(7.4.7)，若其时滞参数是未知但有界的，满足$\tau\in[0\quad\tau_{\max}]$，且$\tau_{\max}$是已知的正实数，则在如下控制律：

$$u(t)=-SAx(t)-\left(m_1\|x\|+m_2\gamma(t)+\psi(x,t)+\eta_1\right)\sigma/\|\sigma\| \tag{7.4.41}$$

作用下，系统是滑模面有限时间稳定的，其中非负标量函数$\gamma(t)$为

$$\gamma(t)=\|x(t-\tau)\|_{\max},\qquad \tau\in[0\quad\tau_{\max}] \tag{7.4.42}$$

正实数 $m_1 = \|SH\|\|E\|$，$m_2 = \|SA_d\| + \|SH_d\|\|E_d\|$，$\eta_1$ 为任意的可调正常数。

在这一小节里，我们的滑模面设计与前一节是不同的，尽管他们的结论都是以 LMI 的形式给出的。从滑模面的定义可以看出，式(7.3.7)的待定变量是矩阵 C，设计的自由度为 $(n-m)\times m$，而式(7.4.7)的待定变量是对称正定矩阵 X，设计的自由度是 $(n+1)\times n/2$。但这并不表示 7.4 节的方法比 7.3 节的具有更小的保守性，实际上，对任意的非奇异矩阵 N，$Sx=0$ 和 $NSx=0$ 代表的是同一滑模面，由此我们可以很容易地验证在系统滑动模态稳定的要求下，式(7.3.7)形式的滑模面的存在性是和式(7.4.7)形式的滑模面存在性是一致的。沿着 7.3 节的思路，同样可以得出非匹配不确定时滞系统下的滑模控制器的设计方案。

7.4.3　数值例子

考虑如下的例子：

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t-d) + B(u(t) + f(t,x(t))), \quad t>0$$
$$x(t) = \phi(t), \quad t\in[-d,0]$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4 & 1.5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|f(t,x(t))\| \leqslant 0.8|\sin t|$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.707 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_d = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.632 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.447 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.707 \\ 0.707 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_d = \begin{bmatrix} 0.447 & 0 \\ 0 & 0.632 \\ 0.447 & 0 \\ 0 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} \delta_{01}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{02}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{03}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{04}(t) \end{bmatrix}, \quad F_d = \begin{bmatrix} \delta_{d1}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{d2}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{d3}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{d4}(t) \end{bmatrix}$$

其中，$|\delta_i(t)| \leqslant 1$，$i\in\{01,02,03,04,d1,d2,d3,d4\}$。

状态轨线见图 7.4.1。

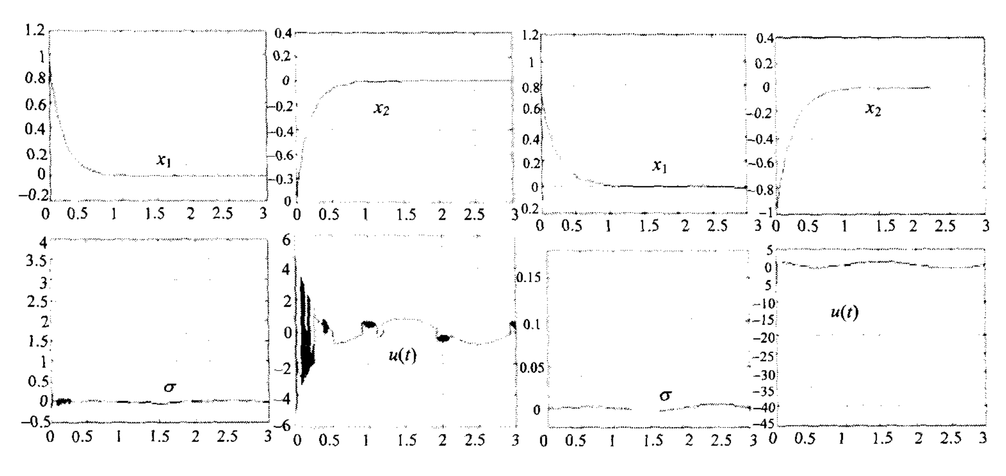


图 7.4.1 状态轨线

7.5 注　记

本章重点研究了具有匹配不确定性、非匹配不确定性的时滞系统的滑模变结构鲁棒控制问题，提出了时滞依赖与时滞独立的两种控制方法，所得结论均以线性矩阵不等式的形式给出。

本章的主要内容来源于作者的研究成果。

参 考 文 献

高为炳. 1998. 变结构控制的理论及设计方法.北京：科学出版社.

项基，苏宏业，褚健，张晓宇. 2004. New synthesis algorithm of static output feedback sliding mode control for a class of uncertain systems. 控制理论与应用(英文版)，2 (3): 293-300.

俞立，褚健，苏宏业. 2000. 鲁棒控制理论及其应用. 杭州：浙江大学出版社.

Balestrino A. 1982. Hyperstable adaptive model following control of nonlinear plants. System and Control Letters, 1 (4): 232-240.

Boyd S, Ghaoui L El, Feron E, Balakrishnan V. 1994. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Philadelphia: SIAM , 15.

Decarlo R A, Zak S H, Matthews G P. 1988. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. Proceeding of The IEEE, 76 (3): 212-232.

Edwards C, Spurgeon S K, Patton R J. 2000. Sliding mode observers for fault detection and isolation. Automatica, 36: 541-553.

EL-Ghezawi O M E, Zinober A S I, Billings S A. 1983. Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach. Int. J. Control, 38 (3): 657-671.

Filippov A F 1960. Differential equations with discontinuous right-hand side. Mathematical Sbornik, 51 (1): 99-128.

Filippov A F. 1961. Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides to non-linear problems of automatic control. Proceedings of 1st IFAC Congress II, Butterworths, London.

Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, Chilal M I. 1995. LMI Control Toolbox, the Mach Works Inc.

Haskara I, Ozguner U, Utkin V I. 1996. On variable structure observers. IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, 193-198.

Lu Y S, Chen J S. 1995. Design of a perturbation estimator using the theory of variable-structure systems and its application to magnetic levitation systems. IEEE Trans. Ind. Electr., 42 (3): 281-289.

Utkin V I. 1992. Sliding Mode in Control Optimization. New York: Springer-Verlag.

Willems J C. 1981. Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design – Part I: almost controlled invariant subspaces. IEEE Trans. Automat. Contr., 26 (1): 235-252.

Willems J C. 1982. Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design – Part II: almost conditionally invariant subspaces. IEEE Trans. Automat. Contr., 27 (5): 1071-1085.

Xiang J, Su H Y, Chu J. 2003. LMI approach to robust delay dependent/independent sliding mode control of uncertain time-delay systems. P the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Oct., 2266-2271.

Xiang J, Su H Y, Chu J. 2003. Variable structure output feedback control for linear system with uncertain output matrix, CDC2003, Maui, Hawaii, USA, Dec., 2994-2998.

Xiang J, Su H Y, Chu J. 2005. A new method for the static output feedback stabilization. Developments in Chemical Engineering and Mineral Processing, 13(3/4): 371-378.

Zhang K Q, Su H Y, Zhuang K Y, Chu J. 2003. Comments on "discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism". IEEE Transactions on Control Systems Technology , 11(1): 156-157.

第 8 章 不确定 Lur'e 时滞控制系统的鲁棒控制

8.1 引 言

Lur'e 时滞系统是一类典型的非线性系统，近年来国内外学者进行了广泛的研究(Hale, 1977, 1993)。对于不确定 Lur'e 时滞系统，利用 Leibniz-Newton 公式得到的绝对稳定性条件，保守性很大，只能解决小时滞问题(Su et al., 1997; Park et al., 2002)，其主要原因，一方面由于时滞的分布特性没有被很好的处理；另一方面，只用单个的 Lyapunov 函数处理作为附加扰动或凸多面体的范数有界不确定性。

非线性出现在许多实际的时滞系统中，因此研究非线性时滞系统的 H_∞控制问题就显得必要。由于可靠控制能设计控制器使得无论控制元件(执行器或传感器)是否出现故障都能保证闭环系统渐近稳定且满足一定的性能指标。因此，自从 20 世纪 70 年代 Siljak 第一次提出可靠控制以来，已经引起了很多学者的兴趣，一些可靠控制器的设计方法也相继提出(Fujita et al., 1988; Veillette et al., 2000; Leland et al., 1994; Yang et al., 1998)。归纳起来，一类设计方法基于控制元件出现故障时输出信号或观测信号为零的假设。Wang 等(1995)基于系统极点的方差和大小作相应限制的假设研究了一类连续时间线性系统的可靠控制器的设计问题；Zhao 等(1998)针对一类具有冗余执行器的线性系统，通过超前补偿器修正冗余执行器控制通道的动力学特性，研究了可靠状态反馈控制器的设计问题；Liao 等(2002)把控制表面故障带来的不确定性通过用凸多面体形式来描述，研究了基于线性矩阵不等式的鲁棒可靠飞行跟踪控制问题，减少了设计方法的保守性，取得了较好的控制效果。Ackerman(1985)考虑了连续的故障模型，这种模型不仅考虑了所有控制元件正常运转的情况，而且考虑了所有控制元件出现故障的情况。Yang 等(2001)在连续模型的基础上研究了输出反馈的可靠 H_∞控制问题，得出了基于黎卡提方程的可靠控制器的设计方法，由于考虑了故障的扰动误差，使得此故障模型更能精确的刻画实际的对象。

本章主要包含以下三部分内容：

(1) 通过引入包含时滞相关度因子的状态变量，构造了相应的 Lyapunov 函数，得到了 Lur'e 时滞系统绝对稳定与二次镇定的充分条件，所构造的 Lyapunov 函数比较简单，控制器设计更易于求解；通过调节时滞相关度因子，能获得保守性最小的结果，它能解决大时滞 Lur'e 时滞系统的稳定性与二次镇定的问题。数值仿

真结果表明，与已有结果相比，保守性有显著的减小。

(2) 提出了不确定 Lur'e 时滞控制系统鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器的设计方法，针对一类具有状态、控制输入、扰动输入的不确定性的 Lur'e 时滞控制系统，通过引入一种输出反馈控制器，构造了一个辅助系统，从没有不确定性的 Lur'e 时滞控制系统入手，由易到难得出了基于线性矩阵不等式(LMI)的鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器的设计方法。

(3) 考虑了扰动误差的连续的故障模型，研究了一类 Lur'e 系统的可靠控制问题。这种故障模型包含了所有控制元件正常运转与出现故障的情况，同时由于用凸多面体描述由于控制表面故障带来的不确定性，并且考虑了初始条件和非线性对系统解的影响，这样使得设计的可靠控制器不仅保证了闭环系统具有渐近稳定性和满足 H_∞ 性能指标，且具有较小的保守性。而且由于可靠 H_∞ 控制器的设计基于线性矩阵不等式，这样避免了解黎卡提方程的困难。通过数值例子在故障发生与故障不发生的情况下，比较了正常系统的控制效果与可靠控制的控制效果，验证了本文提出的设计方法的可行性与有效性。

8.2 不确定 Lur'e 时滞系统绝对稳定性与绝对二次镇定条件

8.2.1 问题描述

考虑如下的一类不确定 Lur'e 时滞系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A_0 + \Delta A_0(x,t))x(t) + \sum_{i=1}^{k}(A_i + \Delta A_i(x,t))x(t - h_i(t)) \\
&\quad + (E_0 + \Delta E_0(x,t))f(\sigma(t)) + \sum_{i=1}^{k}(E_i + \Delta E_i(x,t))f(\sigma(t - h_i(t))) \\
&\quad + (B_0 + \Delta B_0(x,t))u(t) + \sum_{i=1}^{k}(B_i + \Delta B_i(x,t))u_i(t) \\
\sigma(t) &= Cx(t), \quad f(\cdot) \in K[0,k] \\
x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\max h_i(t), 0], \quad i = 1, \cdots, k
\end{aligned} \tag{8.2.1}
$$

其中，$x(t) \in R^n$ 为状态向量，$u(t) \in R^m$ 为控制向量，$f(\sigma(t))$ 为非线性扰动项，位于有限的霍尔维茨角域内。C, A_i, E_i 和 B_i ($i = 0,1,\cdots,k$)为已知的具有适当维数的实矩阵。$\Delta A_i(\cdot)$, $\Delta E_i(\cdot)$ 和 $\Delta B_i(\cdot)$ 为实值连续矩阵函数，分别表示系统的时变参数的不确定性。假定不确定性可以描述成如下形式：

$$
\begin{aligned}
&\Delta A_i(x,t) = D_i F_i(x,t) G_i, \quad \Delta E_i(x,t) = H_i F_i(x,t) M_i \\
&\Delta B_i(x,t) = D_i F_i(x,t) N_i, \quad i = 0,1,\cdots,k
\end{aligned} \tag{8.2.2}
$$

其中，D_i、G_i、H_i、L_i、M_i和 $N_i(i=0,1,\cdots,k)$为已知的具有适当维数的实值矩阵。$F_i(x,t)\in R^{i\times j}$表示未知的实值时变矩阵，其元素 Lebesgue 可测且有界，满足

$$F_i^{\mathrm{T}}(x,t)F_i(x,t)\leqslant I,\quad \forall t,\ i=0,1,\cdots,k \tag{8.2.3}$$

$h_i(t), i=0,1,\cdots,k$是未知有界的时滞项，满足

$$0\leqslant h_i(t)\leqslant h,\quad \dot{h}_i(t)\leqslant h_i<1 \tag{8.2.4}$$

$\varphi(t)$是定义在 Banach 空间 $C_{\mathrm{t}}(t=\max(h_i(t))$上的光滑连续函数，表示系统的初始条件。

定义 8.2.1 对于不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)，非线性机构满足霍尔维茨条件(1.3.2)。如果能找到一个 Lyapunov 泛函$V(x(t))$，对所有的$(x(t),t)\in R^n\times R$，即任意的初始条件$x(t)=\varphi(t),\ t\in[-\tau,0],\tau>0$，有

$$\dot{V}(x(t),t)<0$$

那么称系统(8.2.1)是绝对稳定的。

定义 8.2.2 对于不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)，非线性机构满足霍尔维茨条件(1.3.2)。如果能找到一个线性的状态反馈控制律$\Psi: u(t)=\Lambda x(t), u_i(t)=\Lambda_i x(t-h_i(t))$使得闭环系统是绝对稳定的，那么称系统(8.2.1)是绝对二次镇定的。

8.2.2 绝对稳定性条件

首先，基于文(Su et al.，2001)的思想，得出了如下的引理 8.2.1。

引理 8.2.1 考虑不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)($u(t)=0,u_i(t)=0$)，参数不确定性、时滞项、非线性机构分别满足式(8.2.2)~(8.2.4)、(1.3.2)，对于给定的$K=\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_m)$，如果存在正定对称阵 P、R_i、Q_i 和标量$\varepsilon_i,\eta_i>0,\ i=0,1,\cdots,k$，以及时滞相关度因子$\alpha>0$，使得下列线性矩阵不等式(8.2.5)成立，那么系统(8.2.1)在有限霍尔维茨角域的约束下绝对稳定。

$$\begin{bmatrix} X_1 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 \\ * & -N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -N_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -N_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -N_4 & 0 \\ * & * & * & * & * & -N_5 \end{bmatrix}<0 \tag{8.2.5}$$

其中，*表示矩阵对称项，下同，且

$$X_1 = A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + 2\alpha P + \sum_{i=1}^{k} R_i + \varepsilon_0 G_0^{\mathrm{T}} G_0 + \sum_{i=0}^{k} PE_i Q_i E_i^{\mathrm{T}} P + \eta_0 C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} M_0^{\mathrm{T}} M_0 KC$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} PD_1 & PD_2 & \cdots & PD_k \end{bmatrix}, \quad N_1 = \mathrm{diag}\{\mathrm{e}^{2\alpha h}\varepsilon_1 I, \mathrm{e}^{2\alpha h}\varepsilon_2 I, \cdots, \mathrm{e}^{2\alpha h}\varepsilon_k I\}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\alpha h}PA_1 & \mathrm{e}^{\alpha h}PA_2 & \cdots & \mathrm{e}^{\alpha h}PA_k \end{bmatrix}, \quad N_2 = \mathrm{diag}\{L_1, L_2, \cdots L_k\}$$

$$L_i = (1-h_i)R_i - \varepsilon_i G_i^{\mathrm{T}} G_i - \mathrm{e}^{2\alpha h} C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} Q_i^{-1} KC - \eta_i C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} M_i^{\mathrm{T}} M_i KC, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$M_3 = PD_0, \quad N_3 = \varepsilon_0 I, \quad M_4 = C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}}, \quad N_4 = Q_0$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} PH_0 & PH_1 & \cdots & PH_k \end{bmatrix}, \quad N_5 = \mathrm{diag}\{\eta_0 I, \eta_1 I, \eta_2 I, \cdots, \eta_k I\}$$

证明　引入如下的状态变换：

$$z(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} x(t), \quad t > 0 \tag{8.2.6}$$

其中，$\alpha > 0$，为时滞相关度因子，此时不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)($u(t) = 0, u_i(t) = 0$)变成

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} x(t) + \mathrm{e}^{\alpha t} \dot{x}(t) = \alpha z(t) + \mathrm{e}^{\alpha t}[(A_0 + \Delta A_0(x,t))x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} (A_i + \Delta A_i(x,t))x(t - h_i(t)) + (E_0 + \Delta E_0(x,t)) f(\sigma(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} (E_i + \Delta E_i(x,t)) f(\sigma(t - h_i(t)))] \\ &= (A_0 + \Delta A_0 + \alpha I) z(t) + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{\alpha h_i(t)} (A_i + \Delta A_i(x,t)) z(t - h_i(t)) \\ &\quad + \mathrm{e}^{\alpha t}[(E_0 + \Delta E_0(x,t)) f(\sigma(t)) + \sum_{i=1}^{k} (E_0 + \Delta E_0(x,t)) f(\sigma(t - h_i(t)))] \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

选取如下形式的 Lyapunov 函数：

$$V(z(t), z(t-h_i(t))) = z^{\mathrm{T}}(t) P z(t) + \sum_{i=1}^{n} \int_{t-h_i(t)}^{t} z(t) R_i z(t) \,\mathrm{d}t \tag{8.2.8}$$

式(1.3.2)中的霍尔维茨角域等价表示成

$$f_j(\sigma)(f_j(\sigma) - k_j C x(t)) \leqslant 0, \quad j = 1, \cdots, m \tag{8.2.9}$$

因此，如下的不等式成立：

$$\mathrm{e}^{\alpha t} f^T(\sigma(t))\varepsilon_i^{-1} f(\sigma(t))\mathrm{e}^{\alpha t} \leqslant z^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\varepsilon_i^{-1}KCz(t) \tag{8.2.10}$$

将 Lyapunov 函数 $V(z(t), z(t-h_i(t))$ 沿系统(8.2.1)关于时间 t 求导

$$\dot{V} = \dot{z}^{\mathrm{T}}(t)Pz(t) + z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t) + \sum_{i=1}^{k} z^{\mathrm{T}}(t)R_i z(t) - \sum_{i=1}^{k}(1-\dot{h}_i(t)z^{\mathrm{T}}(t-h_i(t))R_i z(t-h_i(t))$$

利用上面的不等式及引理 2.2.4~2.2.6 有

$$\dot{V} \leqslant X^{\mathrm{T}}SX < 0 \tag{8.2.11}$$

其中

$$X = \left[z^{\mathrm{T}}(t), z^{\mathrm{T}}(t-h_1(t)), \cdots, z^{\mathrm{T}}(t-h_k(t))\right]^{\mathrm{T}}$$

$$S = \begin{bmatrix} M & G \\ G^{\mathrm{T}} & L \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M = {} & A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + 2\alpha P + \sum_{i=1}^{k} R_i + \varepsilon_0^{-1}PD_0D_0^{\mathrm{T}}P + \varepsilon_0 G_0^{\mathrm{T}}G_0 \\ & + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{-1}\mathrm{e}^{2\alpha h_i(t)}PD_iD_i^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=0}^{k}PE_iQ_iE_i^{\mathrm{T}}P + \eta_0 C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} \\ & \times M_0^{\mathrm{T}}M_0KC + C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Q_0^{-1}KC + \sum_{i=0}^{k}\eta_i^{-1}PH_iH_i^{\mathrm{T}}P \end{aligned}$$

$$G = \left[\mathrm{e}^{\alpha h_1(t)}PA_1 \quad \mathrm{e}^{\alpha h_2(t)}PA_2 \quad \cdots \quad \mathrm{e}^{\alpha h_k(t)}PA_k\right], \quad L = -\mathrm{diag}\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$$

根据 Schur 补引理，$S<0$ 成立保证式(8.2.5)成立，由定义 8.2.1 可得，不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)绝对稳定。证毕。

如果选取不同的时滞相关度因子，即构造不同的状态变换，与引理 8.2.1 相比较得到的结果保守性将更小。下面给出的定理 8.2.1 反映了这种情况。

定理 8.2.1　考虑不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)($u(t)=0, u_i(t)=0$)，参数不确定性、时滞项和非线性机构分别满足式(8.2.2)~(8.2.4)、(1.3.2)。对于给定的 $K=\mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_m)$ 如果存在正定对称阵 P、R_i、Q_i、T_i 和标量 $e_i, \eta_i, \gamma_i > 0$, $i=0,1,\cdots,k$，以及时滞相关度因子 $m>0$ $(0<m\leqslant 1)$，使得下列线性矩阵不等式(2.2.12)成立，那么系统(8.2.1)在有限霍尔维茨角域的约束下绝对稳定。

$$\begin{bmatrix} X_1 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & M_7 \\ * & -N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -N_4 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -N_5 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -N_6 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -N_7 \end{bmatrix} < 0 \tag{8.2.12}$$

其中，矩阵 M_1、M_3、M_4、M_5、N_3、N_4 和 N_5 与引理 8.2.1 中的完全一样，且

$$X_1 = A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + 2mP + \sum_{i=1}^{k} R_i + \sum_{i=1}^{k} T_i + \varepsilon_0 G_0^{\mathrm{T}} G_0 + \sum_{i=0}^{k} PE_iQ_iE_i^{\mathrm{T}}P + \eta_0 C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}M_0^{\mathrm{T}}M_0KC$$

$$N_1 = \operatorname{diag}\{\varepsilon_1 I, \varepsilon_2 I, \cdots, \varepsilon_k I\}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} PA_1 & PA_2 & \cdots & PA_k \end{bmatrix}, \quad N_2 = \operatorname{diag}\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$$

$$L_i = (1-h_i)R_i - \varepsilon_i G_i^{\mathrm{T}} G_i - C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Q_i^{-1}KC - \eta_i C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}M_i^{\mathrm{T}}M_iKC$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} mh_1PA_1 & mh_2PA_2 & \cdots & mh_kPA_k \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \cdots & \Omega_k \end{bmatrix}$$

$$\Omega_i = mh_iC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Q_i^{-1}KC + \eta_i mh_iC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}M_i^{\mathrm{T}}M_iKC, \; N_6 = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_k \end{bmatrix}$$

$$\Psi_i = (1-h_i)R_i - \eta_i m^2 h_i^2 C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}M_i^{\mathrm{T}}M_iKC - m^2h_i^2C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Q_i^{-1}KC - \gamma_i m^2 h_i^2 E_i^{\mathrm{T}}E_i$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} PD_1 & PD_2 & \cdots & PD_k \end{bmatrix}, \quad N_7 = \operatorname{diag}\{\gamma_1 I, \gamma_2 I, \cdots, \gamma_k I\}$$

证明　引入如下的状态变换：

$$y(t) = (1+mt)x(t), \quad t > 0 \tag{8.2.13}$$

其中，$0 < m \leqslant 1$ 为时滞相关度因子，此时不确定 Lurie 时滞系统(8.2.1)变成

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= mx(t) + (1+mt)\dot{x}(t) \\ &= mx(t) + (A_0 + \Delta A_0(x,t))y(t) + \sum_{i=1}^{k}(A_i + \Delta A_i(x,t))y(t-h_i(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k}(A_i + \Delta A_i(x,t))mh_i(t)x(t-h_i(t)) \\ &\quad + (1+mt)[(B_0 + \Delta B_0(x,t))f(\sigma(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k}(B_i + \Delta B_i(x,t))f(\sigma(t-h_i(t)))\ ] \end{aligned} \tag{8.2.14}$$

选取如下形式的 Lyapunov 函数：

$$V(y(t), y(t-h_i(t), x(t-h_i(t)) = y^{\mathrm{T}}(t)Py(t) + \sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_i(t)}^{t} y(t)R_i y(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_i(t)}^{t} x(t)T_i x(t)\mathrm{d}t$$

下面的证明过程与引理 8.2.1 类似，在此省略。

注 8.2.1 通过折半搜索的方法，使用 Matlab/LMI toolbox，可以找到保证 Lur'e 时滞系统(8.2.1)绝对稳定的时滞界限，不同的时值相关度因子对应于不同的时滞界限。

8.2.3 绝对二次镇定条件

系统(8.2.1)在线性的状态反馈控制律 $\Psi: u(t) = \Lambda x(t), u_i(t) = \Lambda_i x(t-h_i(t))$, $i=1,\cdots,k$，作用下的闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (\bar{A}_0 + \Delta\bar{A}_0(x,t))x(t) + \sum_{i=1}^{k}(\bar{A}_i + \Delta\bar{A}_i(x,t))x(t-h_i(t)) + (E_0 + \Delta E_0(x,t))f(\sigma(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k}(E_i + \Delta E_i(x,t))f(\sigma(t-h_i(t))) + (B_0 + \Delta B_0(x,t))u(t) + \sum_{i=1}^{k}(B_i + \Delta B_i(x,t))u_i(t) \\ \sigma(t) &= Cx(t), \quad f(\cdot) \in K[0,k] \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\max h_i(t), 0], \quad i = 1,\cdots,k\end{aligned}$$

其中

$$\bar{A}_0 = A_0 + B_0\Lambda, \quad \Delta\bar{A}_0 = \Delta A_0 + \Delta B_0\Lambda, \quad \bar{A}_i = A_i + B_i\Lambda, \quad \Delta\bar{A}_i = \Delta A_i + \Delta B_i\Lambda$$

参数不确定 $\Delta\bar{A}_0$ 和 $\Delta\bar{A}_i (i=1,\cdots,k)$ 重新写成

$$\Delta\bar{A}_0 = D_0F_0(x,t)(G_0 + N_0\Lambda_0), \quad \Delta\bar{A}_i = D_iF_i(x,t)(G_i + N_i\Lambda_i)$$

根据引理 8.2.1 能容易地推出以下的引理 8.2.2 成立。

引理 8.2.2 考虑不确定 Lur'e 时滞系统(2.2.1)，参数不确定性、时滞项、非线性机构分别满足式(2.2.2)、(2.2.3)、(2.2.4)、(1.3.2)，对于给定的 $K = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_m)$，如果存在正定对称阵 P、R_i、Q_i 和标量 $e_i, \eta_i > 0$, $i = 0,1,\cdots,k$，以及时滞相关度因子 $\alpha > 0$，使得下列线性矩阵不等式(2.4.1)成立，那么系统(2.2.1)在有限霍尔维茨角域的约束下绝对二次镇定。

$$\begin{bmatrix} X_1 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 \\ * & -N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -N_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -N_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -N_4 & 0 \\ * & * & * & * & * & -N_5 \end{bmatrix} < 0 \tag{8.2.15}$$

其中

$$\begin{aligned} X_1 = {} & (A_0 + B_0 \Lambda)^{\mathrm{T}} P + P(A_0 + B_0 \Lambda) + 2\alpha P \\ & + \sum_{i=1}^{k} R_i + \sum_{i=1}^{k} T_i + \varepsilon_0 (G_0 + N_0 \Lambda)^{\mathrm{T}} (G_0 + N_0 \Lambda) \\ & + \sum_{i=0}^{k} P E_i Q_i E_i^{\mathrm{T}} P + \eta_0 C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} M_0^{\mathrm{T}} M_0 K C \end{aligned}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} PD_1 & PD_2 & \cdots & PD_k \end{bmatrix}, N_1 = \mathrm{diag}\{ \mathrm{e}^{2\alpha h} \varepsilon_1 I, \mathrm{e}^{2\alpha h} \varepsilon_2 I, \cdots, \mathrm{e}^{2\alpha h} \varepsilon_k I \}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\alpha h} P(A_1 + B_1 \Lambda_1) & \mathrm{e}^{\alpha h} P(A_2 + B_2 \Lambda_2) & \mathrm{e}^{\alpha h} P(A_k + B_k \Lambda_k) \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \mathrm{diag}\{ L_1, L_2, \cdots, L_k \}$$

$$\begin{aligned} L_i = {} & (1 - h_i) R_i - \varepsilon_i (G_i + N_i \Lambda_k)^{\mathrm{T}} (G_i + N_i \Lambda_k) \\ & - \mathrm{e}^{2\alpha h} C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} Q_i^{-1} K C - \eta_i C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} M_i^{\mathrm{T}} M_i K C \end{aligned}$$

$$M_3 = PD_0, \quad N_3 = \varepsilon_0 I, \quad M_4 = C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}}, \quad N_4 = Q_0$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} PH_0 & PH_1 & \cdots & PH_k \end{bmatrix}, \quad N_5 = \mathrm{diag}\{ \eta_0 I, \eta_1 I, \eta_2 I, \cdots, \eta_k I \}$$

定义 $Y = P^{-1}$，在式(8.2.15)两边分别乘上对角矩阵 $\mathrm{diag}\{Y, I, Y, I, I, I\}$，即可得到保证不确定 Lur'e 系统(8.2.1)绝对二次镇定的控制器的求解方法，如下的引理 8.2.3 描述了这种方法。

引理 8.2.3　考虑不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)，参数不确定性、时滞项、非线性机构分别满足(2.2.2)~(2.2.4)、(1.3.2)，对于给定的 $K = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_m)$，如果存在正定对称阵 $Y, \bar{R}_i, Q_i, \bar{Q}_i = Q_i^{-1}$，矩阵 Ξ_i 和标量 $\varepsilon_i, \eta_i > 0,\ i = 0, 1, \cdots, k$，以及时滞相关度因子 $\alpha > 0$，使得下列线性矩阵不等式(2.8.4)成立，那么系统(2.2.1)在有限霍尔维茨角域的约束下绝对二次镇定。

$$\begin{bmatrix} X_1 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & M_7 & M_8 \\ * & -N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & -N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_5 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_6 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_7 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_8 \end{bmatrix} < 0 \tag{8.2.16}$$

式中

$$X_1 = A_0 Y + B_0 \varXi_0 + (A_0 Y + B_0 \varXi_0)^{\mathrm{T}} + 2\alpha Y + \sum_{i=1}^{k} \overline{R}_i, \quad M_1 = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_k \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \mathrm{diag}\{\mathrm{e}^{2\alpha h}\varepsilon_1 I, \mathrm{e}^{2\alpha h}\varepsilon_2 I, \cdots, \mathrm{e}^{2\alpha h}\varepsilon_k I\}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\alpha h}(A_1 Y + B_1 \varXi_1) & \mathrm{e}^{\alpha h}(A_2 Y + B_2 \varXi_2) & \mathrm{e}^{\alpha h}(A_k Y + B_k \varXi_k) \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \mathrm{diag}\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$$

$$L_i = (1-h_i)\overline{R}_i - \varepsilon_i (G_i Y + N_i \varXi_k)^{\mathrm{T}} (G_i Y + N_i \varXi_k) \\ - \mathrm{e}^{2\alpha h} Y C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} Q_i^{-1} K C Y - \eta_i Y C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} M_i^{\mathrm{T}} M_i K C Y$$

$$M_3 = D_0, \quad N_3 = \varepsilon_0 Y, \quad M_4 = Y C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}}, \quad N_4 = Q_0$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \cdots & H_k \end{bmatrix}, \quad N_5 = \mathrm{diag}\{\eta_0 I, \eta_1 I, \eta_2 I, \cdots, \eta_k I\}$$

$$M_6 = G_0^{\mathrm{T}} + \varXi_0^{\mathrm{T}} N_0^{\mathrm{T}}, N_6 = -\varepsilon_0^{-1} I, \quad M_7 = \begin{bmatrix} E_0 & E_1 & \cdots & E_k \end{bmatrix}$$

$$N_7 = \mathrm{diag}\{\overline{Q}_0, \overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \cdots, \overline{Q}_k\}, \quad M_8 = Y C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} M_0^{\mathrm{T}}, \quad N_8 = -\eta_0^{-1} I$$

状态反馈控制器增益可通过下式求得：

$$\varLambda = \varXi_0 Y^{-1}, \quad \varLambda_i = \varXi_i Y^{-1}, \quad i = 1, \cdots, k \tag{8.2.17}$$

类似于引理 8.2.2 与引理 8.2.3，通过引入新的状态变换，选取新的时滞相关度因子 $m > 0\ (0 < m \leqslant 1)$，即能得到本章的主要结论。

定理 8.2.2　考虑不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)，参数不确定性、时滞项和非线性机构分别满足(8.2.2)~(8.2.4)和(1.3.3)。对于给定的 $K = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_m)$ 如果存在正定对称阵 $Y, \overline{R}_i, \overline{T}_i, Q_i, \overline{Q}_i = Q_i^{-1}$，矩阵 $\varXi_i$ 和标量 $\varepsilon_i, \eta_i, \gamma_i > 0,\ i = 0, 1, \cdots, k$，以及时滞相关度因子 $m > 0\ (0 < m \leqslant 1)$，使得下列线性矩阵不等式(8.2.18)成立，那么系统(8.2.1)在有限霍尔维茨角域的约束下绝对二次镇定。

$$\begin{bmatrix} X_1 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & M_7 \\ * & -N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -N_4 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -N_5 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -N_6 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -N_7 \end{bmatrix} < 0 \tag{8.2.18}$$

式中，矩阵 M_1、M_3、M_4、M_5、N_3、N_4 和 N_5 与引理 8.2.3 中的完全一样，且

$$X_1 = A_0Y + B_0\Xi_0 + (A_0Y + B_0\Xi_0)^{\mathrm{T}} + 2mY + \sum_{i=1}^{k}\overline{R}_i + \sum_{i=1}^{k}\overline{T}_i$$

$$+ \varepsilon_0 Y G_0^{\mathrm{T}} G_0 Y + \sum_{i=0}^{k} E_i Q_i E_i^{\mathrm{T}} + YC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}M_i^{\mathrm{T}}M_iKCY$$

$$N_1 = \mathrm{diag}\{\varepsilon_1 I, \varepsilon_2 I, \cdots, \varepsilon_k I\}, M_2 = \begin{bmatrix} A_1Y + B_1\Xi_1 & A_2Y + B_2\Xi_2 & \cdots & A_kY + B_k\Xi_k \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \mathrm{diag}\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$$

$$L_i = (1-h_i)\overline{R}_i - \varepsilon_i(G_iY)^{\mathrm{T}}G_iY - YC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Q_i^{-1}KCY - \eta_i YC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}M_i^{\mathrm{T}}M_iKCY$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} mh_1(A_1Y + B_1\Xi_1) & mh_2(A_2Y + B_2\Xi_2) & \cdots & mh_k(A_kY + B_k\Xi_k) \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \cdots & \Omega_k \end{bmatrix}$$

$$\Omega_i = mh_iC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Q_i^{-1}KC + \eta_i mh_iC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}M_i^{\mathrm{T}}M_iKCY$$

$$N_6 = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_k \end{bmatrix}$$

$$\Psi_i = (1-h_i)R_i - \eta_i m^2h_i^2C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}M_i^{\mathrm{T}}M_iKC - m^2h_i^2C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Q_i^{-1}KC - \gamma_i m^2h_i^2E_i^{\mathrm{T}}E_i$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_k \end{bmatrix}, \quad N_7 = \mathrm{diag}\{\gamma_1 I, \gamma_2 I, \cdots, \gamma_k I\}$$

状态反馈控制器增益通过式(8.2.17)得到。

8.2.4　数值仿真例子

例 8.2.1　考虑文献(de Souza et al.，1999)中的例 1，其系统矩阵为

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_0 = 0, \quad E_1 = 0, \quad C = 0, \quad K = 0$$

$$D_0 = D_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad G_0 = G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基于引理 8.2.1，使用 Matlab/LMI-toolbox，当 $\alpha = 0$ 时，对于任意的满足

$0 \leqslant h(t) \leqslant 3.4335$ 的 $h(t)$，不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)是绝对稳定的；文献(Gao et al.，2002)得出的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 2.5$，而文献(Fridman et al.，2002)得出的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 0.999$，文献(de Souza et al.，1999)得出的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 0.4437$。当 $\alpha = 0.5$ 时，保证不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)绝对稳定的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 1.7968$；当 $\alpha = 0.3$ 时，绝对稳定的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 2.5927$；当 $\alpha = 0.1$ 时，绝对稳定的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 3.0136$。可见，当时滞相关度因子 α 减小时，保证不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)绝对稳定的时滞区间却增大，与已有结果相比，保守性有一定的减小。

基于定理 8.2.1，当 $m = 0.5$ 时，保证系统(2.2.1)绝对稳定的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 0.8669$；当 $m = 0.3$ 时，时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 3.3416$；当 $m = 0.1$ 时，时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 7.8492$。与已有结果相比，通过新方法后获得的保证不确定 Lur'e 时滞系统(8.2.1)绝对稳定的时滞区间明显增大，保守性明显减小。

例 8.2.2　考虑文献(de Souza et al.，1999)中的例 1，其系统矩阵为

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_0 = 0, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 0, \quad D_0 = D_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad G_0 = G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

应用定理 8.2.2，当 $m = 0$ 时，保证不确定 Lur'e 时滞系统(2.2.1)绝对二次镇定的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 5.3329$，文献(Shi et al., 2000)得出的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 3.2$，而文献(Su et al., 1999)得出的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 1.28$，文献(Gao et al.，2002)得出的时滞区间为 $0 \leqslant h(t) \leqslant 0.3346$。表 8.2.1 列出了当 $m = 0$ 时，相应的控制器的增益。从表 8.2.1 可以看出，与已有结果相比较，本文提出的方法的保守性更小。

表 8.2.1　本章结果与已有结果的比较

	反馈增益 Λ	$h_{\max}$
本文	$[-5.34 \quad -11.69]$	5.3329
文献(Gao，2002)	$[-7.96 \quad -14.77]$	3.2
文献(Fridman，2002)	$[0 \quad -1.6\times10^{6}]$	1.28

8.3　不确定 Lur'e 时滞系统的 H_∞ 输出反馈控制器的设计

8.3.1　问题描述

考虑如下的一类不确定 Lur'e 时滞控制系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A_0 + \Delta A_0(x,t))x(t) + \sum_{i=1}^{k}(A_i + \Delta A_i(x,t))x(t - h_i(t)) \\ &\quad + E_{10}f_1(\sigma(t)) + \sum_{i=1}^{k}E_{1i}f_{1i}(\sigma(t - h_i(t))) \\ &\quad + (B_{10} + \Delta B_{10}(x,t))w(t) + \sum_{i=1}^{k}(B_{1i} + \Delta B_{1i}(x,t))w(t - h_i(t)) \\ &\quad + (B_{20} + \Delta B_{20}(x,t))u(t) + \sum_{i=1}^{k}(B_{2i} + \Delta B_{2i}(x,t))u(t - h_i(t))\end{aligned} \tag{8.3.1}$$

$$\begin{aligned}z(t) &= (C_{10} + \Delta C_{10}(x,t))x(t) + \sum_{i=1}^{k}(C_{1i} + \Delta C_{1i}(x,t))x(t - h_i(t)) \\ &\quad + E_{20}f_2(\sigma(t)) + \sum_{i=1}^{k}E_{2i}f_{2i}(\sigma(t - h_i(t))) \\ &\quad + (D_{10} + \Delta D_{10}(x,t))w(t) + \sum_{i=1}^{k}(D_{1i} + \Delta D_{1i}(x,t))w(t - h_i(t)) \\ &\quad + (D_{20} + \Delta D_{20}(x,t))u(t) + \sum_{i=1}^{k}(D_{2i} + \Delta D_{2i}(x,t))u(t - h_i(t))\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

$$\begin{aligned}y(t) &= (C_{20} + \Delta C_{20}(x,t))x(t) + \sum_{i=1}^{k}(C_{2i} + \Delta C_{2i}(x,t))x(t - h_i(t)) \\ &\quad + E_{30}f_3(\sigma(t)) + \sum_{i=1}^{k}E_{3i}f_{3i}(\sigma(t - h_i(t))) \\ &\quad + (D_{30} + \Delta D_{30}(x,t))w(t) + \sum_{i=1}^{k}(D_{3i} + \Delta D_{3i}(x,t))w(t - h_i(t))\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

$$\begin{gathered}\sigma(t) = Cx(t), \quad x(t) = 0, \quad w(t) = 0, \quad u(t) = 0 \\ t \in [-\max((h_j(t)),0], \quad j = 0,1,\cdots,k\end{gathered} \tag{8.3.4}$$

把此控制系统记为Σ_Δ，其中 x 为定义在 $x \in R^{n_x}$ 的状态向量，$u \in R^{n_u}$ 为控制输入，$w \in R^{n_w}$ 为扰动输入，$z \in R^{n_z}$ 为控制输出，$y \in R^{n_y}$ 为观测输出。A_i、B_{1i}、B_{2i}、C_{1i}、C_{2i}、D_{1i}、D_{2i}、D_{3i}、D_{4i}、E_{1i}、E_{2i}、$E_{3i}(i = 0,1,2,\cdots,k)$ 为已知的具有适当维数的常矩阵。ΔA_i、ΔB_{1i}、ΔB_{2i}、ΔC_{1i}、ΔC_{2i}、ΔD_{1i}、ΔD_{2i}、ΔD_{3i}、ΔD_{4i}、ΔE_{1i}、ΔE_{2i}、ΔE_{3i} 为实值连续矩阵函数，分别表示系统的时变参数的不确定性。

假定不确定性可以描述成如下形式：

$$
\begin{bmatrix} \Delta A_0 & \Delta A_1 & \Delta B_{10} & \Delta B_{11} & \Delta B_{20} & \Delta B_{21} \\ \Delta C_{10} & \Delta C_{11} & \Delta D_{10} & \Delta D_{11} & \Delta D_{20} & \Delta D_{21} \\ \Delta C_{20} & \Delta C_{21} & \Delta D_{30} & \Delta D_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \\ G_{31} \end{bmatrix} F(x,t) \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \end{bmatrix} \tag{8.3.5}
$$

其中，G_{11}、G_{21}、G_{31}、H_{11}、H_{12}、H_{13}、H_{14}、H_{15}、H_{16} 为已知的具有适当维数的常矩阵。$F(x,t)$ 表示未知的实值时变矩阵，其元素 Lebesgue 可测且有界，满足

$$
F^{\mathrm{T}}(x,t)F(x,t) \leqslant I, \quad \forall t \tag{8.3.6}
$$

$h_j(t), j=1,2,\cdots,k$ 是未知有界的时滞项，满足式(8.3.5)。每一个非线性项位于有限霍尔维茨角域，即

$$
\begin{aligned}
& f_j(\cdot) = \{f_j(\sigma) \,|\, f_j(0)=0, 0 < \sigma f_j(\sigma) \leqslant K_j \sigma^2 (\sigma \neq 0)\}, \quad j=1,2,3 \\
& f_{ji}(\cdot) = \{f_{ji}(\sigma) \,|\, f_{ji}(0)=0, 0 < \sigma f_{ji}(\sigma) \leqslant K_{ji} \sigma^2 (\sigma \neq 0)\}, \quad i=1,2,\cdots,k
\end{aligned} \tag{8.3.7}
$$

其中，K_j、K_{ji} 为适当维数的对角矩阵。对于变量 $v(t)$ 的二范数定义为

$$
\|v(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} v^{\mathrm{T}}(t) v(t) \mathrm{d}t}
$$

8.3.2 没有参数不确定的输出反馈控制

如果式(8.3.5)中右边后面一项为零，则参数不确定系统 $\varSigma_{\Delta}$ 变为没有参数不确定 $\varSigma_L$，考虑如下的能严格实现的阶次为 n_c 的输出反馈控制器：

$$
\varSigma_{\mathrm{spc}}: \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases} \tag{8.3.8}
$$

此时闭环系统 $\bar{\varSigma}_L$ 由 $\varSigma_L$ 与 $\varSigma_{\mathrm{spc}}$ 合并而成，且为没有控制输入的自治系统

$$
\bar{\varSigma}_L: \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \hat{\bar{A}}\hat{\bar{x}} + \bar{B}w + \hat{\bar{B}}\hat{\bar{w}} + \bar{E}_1\bar{f}_1 + \hat{\bar{E}}_1\hat{\bar{f}}_1 \\ z = \bar{C}\bar{x} + \hat{\bar{C}}\hat{\bar{x}} + \bar{D}w + \hat{\bar{D}}\hat{\bar{w}} + \bar{E}_2\bar{f}_2 + \hat{\bar{E}}_2\hat{\bar{f}}_2 \end{cases} \tag{8.3.9}
$$

其中，$\bar{x}^{\mathrm{T}} = [x^{\mathrm{T}} \quad x_c^{\mathrm{T}}]$，$\hat{\bar{x}} = [\hat{\bar{x}}_1 \cdots \hat{\bar{x}}_k]$，$\hat{\bar{x}}_i^{\mathrm{T}} = [x^{\mathrm{T}}(t-h_i(t)) \quad x_c^{\mathrm{T}}(t-h_i(t))]$，$\bar{f}_1^{\mathrm{T}} = [f_1^{\mathrm{T}} \quad f_3^{\mathrm{T}}]$，

$\bar{\bar{f}}_1^{\mathrm{T}}=[\bar{f}_{11}^{\mathrm{T}}\cdots\bar{f}_{1k}^{\mathrm{T}}]$ ，$\bar{f}_{1i}^{\mathrm{T}}=[f_{1i}^{\mathrm{T}}(\sigma(t-h_i(t))\quad f_{3i}^{\mathrm{T}}(\sigma(t-h_i(t))]$ ，$\bar{\bar{w}}^{\mathrm{T}}=\left[\bar{w}_{11}^{\mathrm{T}}\cdots\bar{w}_{1k}^{\mathrm{T}}\right]$ ，$\bar{w}_{1i}^{\mathrm{T}}=w^{\mathrm{T}}(t-h_i(t))$ 且

$$\begin{cases}\bar{\bar{A}}=[\bar{A}_1\cdots\bar{A}_k],\quad \bar{\bar{B}}=[\bar{B}_1\cdots\bar{B}_k]\\ \bar{\bar{C}}=[\bar{C}_1\cdots\bar{C}_k],\quad \bar{\bar{D}}=[\bar{D}_1\cdots\bar{D}_k]\\ \bar{\bar{E}}_1=[\bar{E}_{11}\cdots\bar{E}_{1k}],\quad \bar{\bar{E}}_2=[\bar{E}_{21}\cdots\bar{E}_{2k}]\end{cases}\tag{8.3.10}$$

$\bar{A}$、$\bar{A}_i$、$\bar{B}$、$\bar{B}_i$、$\bar{C}$、$\bar{C}_i$、$\bar{D}$、$\bar{D}_i$、$\bar{E}_1$、$\bar{E}_{1i}$、$\bar{E}_2$、$\bar{E}_{2i}$ 分别表示为

$$\begin{cases}\bar{A}=\begin{bmatrix}A_0 & B_{20}C_c\\ B_cC_{20} & A_c\end{bmatrix},\quad \bar{A}_i=\begin{bmatrix}A_i & B_{2i}C_c\\ B_cC_{2i} & 0\end{bmatrix}\\ \bar{B}=\begin{bmatrix}B_{10}\\ B_cD_{30}\end{bmatrix},\quad \bar{B}_i=\begin{bmatrix}B_{1i}\\ B_cD_{3i}\end{bmatrix}\\ \bar{C}=[C_{10}\quad D_{20}C_c],\quad \bar{C}_i=[C_{1i}\quad D_{2i}C_c]\\ \bar{D}=D_{10},\quad \bar{D}_i=D_{1i}\\ \bar{E}_1=\begin{bmatrix}E_{10} & 0\\ 0 & B_cE_{30}\end{bmatrix},\quad \bar{E}_{1i}=\begin{bmatrix}E_{1i} & 0\\ 0 & B_cE_{3i}\end{bmatrix}\\ \bar{E}_2=E_{20},\ \bar{E}_{2i}=E_{2i},\quad i=1,2,\cdots,k\end{cases}\tag{8.3.11}$$

下面我们来分析系统(8.3.1)~(8.3.4)鲁棒 H_∞ 性能。为简化起见，不失一般性，设 $k=1$，此时

$$\bar{\Sigma}_L:\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}(t)+\bar{A}_1\bar{x}(t-h_1(t))+\bar{B}w+\bar{B}_1w(t-h_1(t))+\bar{E}_1\bar{f}_1(\sigma(t))+\bar{E}_{11}\bar{f}_{11}(\sigma(t-h_1(t)))\\ z=\bar{C}\bar{x}(t)+\bar{C}_1\bar{x}(t-h_1(t))+D_{10}w+D_{11}w(t-h_1(t))+E_{20}f_2+E_{21}f_2(\sigma(t-h_1(t)))\end{cases}\tag{8.3.12}$$

对于系统(8.3.12)的 H_∞ 控制问题，我们有如下的结果：

定理 8.3.1　考虑 Lur'e 时滞控制系统(8.3.12)，时滞项、非线性机构分别满足(8.2.4)、(8.3.7)，对于给定的对角矩阵 K_1、K_2、K_3、K_{11}、K_{21}、K_{31}，如果存在正定对称阵 P、S_1 和标量 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{11},\lambda_{21}>0$ 使得线性矩阵不等式(8.3.14)成立，那么系统(8.3.12)在有限霍尔维茨角域的约束下鲁棒渐近稳定，并且满足 H_∞ 范数约束条件(8.3.13)，即 Σ_{spc} 为一鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器。

$$\|z(t)\|_2^2\leqslant\|w(t)\|_2^2+\|w(t-h_1(t))\|_2^2\tag{8.3.13}$$

$$M_N=\begin{bmatrix} M_{N11} & P\overline{A}_1 & P\overline{B} & P\overline{B}_1 & P\overline{B}_H & \overline{C}^{\mathrm{T}} & \overline{C}_H^{\mathrm{T}} \\ \overline{A}_1^{\mathrm{T}}P & -(1-h_1)S_1 & 0 & 0 & 0 & \overline{C}_1^{\mathrm{T}} & \overline{C}_{1H}^{\mathrm{T}} \\ \overline{B}^{\mathrm{T}}P & 0 & -I & 0 & 0 & D_{10}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \overline{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -I & 0 & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \overline{B}_H^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & -I & \overline{D}_H^{\mathrm{T}} & 0 \\ \overline{C} & \overline{C}_1 & D_{10} & D_{11} & \overline{D}_H & -I & 0 \\ \overline{C}_H & \overline{C}_{1H} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0 \tag{8.3.14}$$

其中

$$M_{N11}=\overline{A}^{\mathrm{T}}P+P\overline{A}+S_1,\quad \overline{B}_H=[\lambda_1\overline{E}_1\ \ \lambda_{11}\overline{E}_{11}\ \ 0\ \ 0],\quad \overline{D}_H=[0\ \ 0\ \ \lambda_2E_{20}\ \ \lambda_{21}E_{21}]$$

$$\overline{C}_H^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1}C^{\mathrm{T}}\overline{K}_1 & 0 & \frac{1}{\lambda_2}C^{\mathrm{T}}\overline{K}_2 & 0\end{bmatrix},\quad \overline{C}_{1H}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\lambda_{11}}C^{\mathrm{T}}\overline{K}_{11} & 0 & \frac{1}{\lambda_{21}}C^{\mathrm{T}}\overline{K}_{21}\end{bmatrix}$$

$$\overline{K}_1=\begin{bmatrix}K_1 & 0\\ 0 & K_3\end{bmatrix},\quad \overline{K}_2=\begin{bmatrix}K_2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \overline{K}_{11}=\begin{bmatrix}K_{11} & 0\\ 0 & K_{31}\end{bmatrix},\quad \overline{K}_{21}=\begin{bmatrix}K_{21} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

证明　把霍尔维茨条件(8.3.7)等价表示成

$$f_j(\sigma)(f_j(\sigma)-K_jCx(t))\leqslant 0\Rightarrow\|f_j(\sigma)\|^2\leqslant\|K_jCx(t)\|^2 \tag{8.3.15}$$

取

$$\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1}\overline{x}^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}\overline{K}_1^{\mathrm{T}} & \frac{1}{\lambda_{11}}\overline{x}^{\mathrm{T}}(t-h_1(t))C^{\mathrm{T}}\overline{K}_{11}^{\mathrm{T}} & \frac{1}{\lambda_2}\overline{x}^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}\overline{K}_2^{\mathrm{T}} & \frac{1}{\lambda_{21}}\overline{x}^{\mathrm{T}}(t-h_1(t))C^{\mathrm{T}}\overline{K}_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\beta^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1}\overline{f}_1^{\mathrm{T}}(\sigma(t)) & \frac{1}{\lambda_{11}}\overline{f}_{11}^{\mathrm{T}}(\sigma(t-h_1(t))) & \frac{1}{\lambda_2}f_2^{\mathrm{T}}(\sigma(t)) & \frac{1}{\lambda_{21}}f_2^{\mathrm{T}}(\sigma(t-h_1(t)))\end{bmatrix}$$

选取如下形式的 Lyapunov 函数：

$$V(\overline{x}(t))=\overline{x}^{\mathrm{T}}(t)P\overline{x}(t)+\int_{-h_1(t)}^{t}\overline{x}^{\mathrm{T}}(\tau)S_1\overline{x}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t(\|\alpha(t)\|^2-\|\beta(t)\|^2)\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^t(\|z(t)\|^2-\|w(t)\|^2-\|w(t-h_1(t))\|^2)\mathrm{d}t \tag{8.3.16}$$

从式(8.3.16)可以看出，如果$V(x(t))\leqslant 0$，则有$\|z(t)\|_2^2\leqslant\|w(t)\|_2^2+\|w(t-h_1(t))\|_2^2$，而$V(x(0))=0$，因此我们只需证明$\dot{V}(x(t))\leqslant 0$，则式(8.3.13)成立。而

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}(t)) \leqslant{} & \bar{x}^{\mathrm{T}}(t)(P\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}P+S_1)\bar{x}(t)+\bar{x}^{\mathrm{T}}(t-h_1(t))(\bar{C}_{1H}^{\mathrm{T}}+\bar{C}_{1H}-(1-h_1)S_1)\\ &\times\bar{x}(t-h_1(t))+2\bar{x}^{\mathrm{T}}(t)P(\bar{A}_1\bar{x}(t-h_1(t))+\bar{B}w(t)\\ &+\bar{B}_1w(t-h_1(t))+\bar{E}_1\bar{f}_1+\bar{E}_{11}\bar{f}_{11})\\ &+\left\|\bar{C}\bar{x}(t)+\bar{C}_1\bar{x}(t-h_1(t)+D_{10}w(t)+D_{11}w(t-h_1(t))+E_{20}f_2+E_{21}f_{21}\right\|^2\\ &-\|\beta\|^2-\|w(t)\|^2-\|w(t-h_1(t))\|^2=X^{\mathrm{T}}M_HX \end{aligned} \tag{8.3.17}$$

其中 $X^{\mathrm{T}}=[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-h_1(t))\quad w^{\mathrm{T}}(t)\quad w^{\mathrm{T}}(t-h_1(t))\quad \beta^{\mathrm{T}}(t)]$，且

$$M_H=\begin{bmatrix} M_{H11} & P\bar{A}_1+\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C}_1 & P\bar{B}+\bar{C}^{\mathrm{T}}D_{10} & P\bar{B}_1+\bar{C}^{\mathrm{T}}D_{11} & P\bar{B}_H+\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{D}_H\\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P+\bar{C}_1^{\mathrm{T}}\bar{C} & M_{H22} & \bar{C}_1^{\mathrm{T}}D_{10} & \bar{C}_1^{\mathrm{T}}D_{11} & \bar{C}_1^{\mathrm{T}}\bar{D}_H\\ \bar{B}^{\mathrm{T}}P+D_{10}^{\mathrm{T}}\bar{C} & D_{10}^{\mathrm{T}}\bar{C}_1 & D_{10}^{\mathrm{T}}D_{10}-I & D_{10}^{\mathrm{T}}D_{11} & D_{10}^{\mathrm{T}}\bar{D}_H\\ \bar{B}_1^{\mathrm{T}}P+D_{11}^{\mathrm{T}}\bar{C} & D_{11}^{\mathrm{T}}\bar{C}_1 & D_{11}^{\mathrm{T}}D_{10} & D_{11}^{\mathrm{T}}D_{11}-I & D_{11}^{\mathrm{T}}\bar{D}_H\\ \bar{B}_H^{\mathrm{T}}P+\bar{D}_H^{\mathrm{T}}\bar{C} & \bar{D}_H^{\mathrm{T}}\bar{C}_1 & \bar{D}_H^{\mathrm{T}}D_{10} & \bar{D}_H^{\mathrm{T}}D_{11} & \bar{D}_H^{\mathrm{T}}\bar{D}_H-I \end{bmatrix}$$

$$M_{H11}=P\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}P+S_1+\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C}+\bar{C}_H^{\mathrm{T}}\bar{C}_H,\qquad M_{H22}=\bar{C}_1^{\mathrm{T}}\bar{C}_1+\bar{C}_{1H}^{\mathrm{T}}\bar{C}_{1H}-(1-h_1)S_1$$

由 Schur 补引理得，矩阵 M_H 等价于矩阵 M_N，而 $M_N<0$，所以 $X^{\mathrm{T}}M_HX<0$，即

$$V(\bar{x}(t))\leqslant X^{\mathrm{T}}M_HX<0 \tag{8.3.18}$$

所以系统(8.3.12)在有限霍尔维茨角域的约束条件下鲁棒渐近稳定，并且满足 H_∞ 范数约束条件(8.3.13)，即 Σ_{spc} 为一鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器。

注 8.3.1　定理 8.2.1 只是在理论上证明了鲁棒 H_∞ 输出反馈控制存在的条件，但不能求出 Σ_{spc} 的具体解，为此，我们必须做一些变换，以便能通过 LMI 求解出 Σ_{spc}。下面来分析求解 Σ_{spc} 的方法。

假定 Σ_{spc} 的阶次 $n_c=n_x$，令 $P=X_2X_1^{-1}$，X_1、X_2 为两可逆矩阵，其形式为

$$X_1=\begin{bmatrix} R & I\\ M^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix},\qquad X_2=\begin{bmatrix} I & Q\\ 0 & N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{8.3.19}$$

其中，R、Q 为待定的正定对称阵，M、N 为待定的可逆矩阵，由 P 的对称性可知

$$X_1^{\mathrm{T}}X_2X_1^{-1}=X_2^{\mathrm{T}} \tag{8.3.20}$$

则 R、Q、M、N 必须满足

$$MN^{\mathrm{T}} + RQ = I \tag{8.3.21}$$

在式(8.3.14)两边左乘 $\mathrm{diag}\left\{X_1^{\mathrm{T}}, I, I, I, I, I, I\right\}$ 右乘 $\mathrm{diag}\left\{X_1, I, I, I, I, I, I\right\}$，则

$$M_N' = \mathrm{diag}\left\{X_1^{\mathrm{T}}, I, I, I, I, I, I\right\} M_N \mathrm{diag}\left\{X_1, I, I, I, I, I, I\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{matrix} X_1^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}}X_2 + X_2^{\mathrm{T}}\bar{A}X_1 \\ + X_1^{\mathrm{T}}S_1X_1 \end{matrix} & X_2^{\mathrm{T}}\bar{A}_1 & X_2^{\mathrm{T}}\bar{B} & X_2^{\mathrm{T}}\bar{B}_1 & X_2^{\mathrm{T}}\bar{B}_H & X_1^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}}\bar{C}_H^{\mathrm{T}} \\ \bar{A}_1^{\mathrm{T}}X_2 & -(1-h_1)S_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_1^{\mathrm{T}} & \bar{C}_{1H}^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}^{\mathrm{T}}X_2 & 0 & -I & 0 & 0 & D_{10}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \bar{B}_1^{\mathrm{T}}X_2 & 0 & 0 & -I & 0 & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \bar{B}_H^{\mathrm{T}}X_2 & 0 & 0 & 0 & -I & \bar{D}_H^{\mathrm{T}} & 0 \\ \bar{C}X_1 & \bar{C}_1 & D_{10} & D_{11} & \bar{D}_H & -I & 0 \\ \bar{C}_HX_1 & \bar{C}_{1H} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{8.3.22}$$

如果取

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}S_{22}C_c \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_{11} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}K_{31} \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_1 = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}K_3 \end{bmatrix} \tag{8.3.23}$$

则下式成立

$$\begin{aligned} M_N' = {} & \mathrm{diag}\left\{\mathrm{diag}\{I, I\}, \mathrm{diag}\left\{I, C_c^{\mathrm{T}}\right\}, I, I, I, I, I\right\} \\ & \times M_N''\mathrm{diag}\left\{\mathrm{diag}\{I, I\}, \mathrm{diag}\{I, C_c\}, I, I, I, I, I\right\} < 0 \end{aligned} \tag{8.3.24}$$

其中

$$M_N'' = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} & \Theta_{15} & \Theta_{16} & \Theta_{17} \\ \Theta_{12}^{\mathrm{T}} & \Theta_{22} & 0 & 0 & 0 & \Theta_{26} & \Theta_{27} \\ \Theta_{13}^{\mathrm{T}} & 0 & -I & 0 & 0 & D_{10}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \Theta_{14}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I & 0 & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \Theta_{15}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -I & \bar{D}_H^{\mathrm{T}} & 0 \\ \Theta_{16}^{\mathrm{T}} & \Theta_{26}^{\mathrm{T}} & D_{10} & D_{11} & \bar{D}_H & -I & 0 \\ \Theta_{17}^{\mathrm{T}} & \Theta_{27}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{8.3.25}$$

这里

$$\Theta_{11} = \begin{bmatrix} \mathrm{sym}(A_0R + B_{20}G) + RS_{11}R + G^{\mathrm{T}}S_{22}G & H^{\mathrm{T}} + A_0 + RS_{11} \\ A_0^{\mathrm{T}} + H + S_{11}R & \mathrm{sym}(A_0Q + FC_{20}) + S_{11} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{12} = \begin{bmatrix} A_1 & B_{21} \\ QA_1 + FC_{21} & QB_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{13} = \begin{bmatrix} B_{10} \\ QB_{10} + FD_{30} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{14} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ QB_{11} + FD_{31} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{16} = \begin{bmatrix} RC_{10}^{\mathrm{T}} + G^{\mathrm{T}}D_{20}^{\mathrm{T}} \\ C_{10}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{15} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \begin{bmatrix} E_{10} & 0 \\ QE_{10} & FE_{30} \end{bmatrix} & \lambda_{11} \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ QE_{11} & FE_{31} \end{bmatrix} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{17} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} \begin{bmatrix} RC^{\mathrm{T}}K_1 & G^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}K_3 \\ C^{\mathrm{T}}K_1 & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dfrac{1}{\lambda_2} \begin{bmatrix} RC^{\mathrm{T}}K_2 & 0 \\ C^{\mathrm{T}}K_2 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{22} = -(1-h_1)\begin{bmatrix} S_{11} & \\ & S_{22} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{26} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\mathrm{T}} \\ D_{21}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{27} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_{11}} \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}K_{11} & \\ & C^{\mathrm{T}}K_{31} \end{bmatrix} & 0 & \dfrac{1}{\lambda_{21}} \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}K_{21} & \\ & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

其中，$Q>0$，$R>0$，F、H、G 满足以下的条件：

$$\begin{aligned} &F = NB_c, \quad G = C_cM^{\mathrm{T}} \\ &H = NA_cM^{\mathrm{T}} + NB_cC_{20}R + QB_{20}C_cM^{\mathrm{T}} + QA_0R \end{aligned} \tag{8.3.26}$$

综上所述，我们得到下面的推论 8.3.1。

推论 8.3.1　如果存在正定阵 Q、R，同时式(8.3.25)成立，则闭环控制系统 $\bar{\Sigma}_L$ 是鲁棒渐近稳定的，并且满足 H_∞ 范数约束条件(8.3.13)。鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器 Σ_{spc} 由式(8.3.26)求得，式(8.3.26)中的 M、N 满足式(8.3.21)。

鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器 Σ_{spc} 设计方法如下：

(1) 对于给定的控制系统 Σ_L 以及 S_1，求解 LMI：$Q>0$，$R>0$，$M_N''<0$，解出 Q、R、F、G、H。

(2) 通过式(8.3.21)解出 M、N。

(3) 通过式(8.3.26)解出 A_c、B_c、C_c。

注 8.3.2　时滞上界 h_1 可通过迭代法获得，方法如下：给定常数 $h_1>0$，求解线性矩阵不等式(8.3.25)，如果(8.3.25)存在可行解，增大 h_1；否则，缩小 h_1。利用折半搜索不断进行迭代计算，可使 h_1 按任意精度收敛到时滞上界。

8.3.3 具有参数不确定的输出反馈控制

此时系统为 Σ_Δ ，输出反馈控制器 Σ_{spc} 仍为式(8.3.8)所示，假定闭环系统为 $\bar{\Sigma}_\Delta$ ，它由 Σ_Δ 与 Σ_{spc} 合并而成

$$\bar{\Sigma}_\Delta : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}_\Delta \bar{x} + \bar{\bar{A}}_\Delta \bar{\bar{x}} + \bar{B}_\Delta w + \bar{\bar{B}}_\Delta \bar{\bar{w}} + \bar{E}_1 \bar{f}_1 + \bar{\bar{E}}_1 \bar{\bar{f}}_1 \\ z = \bar{C}_\Delta \bar{x} + \bar{\bar{C}}_\Delta \bar{\bar{x}} + \bar{D}_\Delta w + \bar{\bar{D}}_\Delta \bar{\bar{w}} + \bar{E}_2 \bar{f}_2 + \bar{\bar{E}}_2 \bar{\bar{f}}_2 \end{cases} \tag{8.3.27}$$

其中

$$\begin{cases} \bar{\bar{A}}_\Delta = [\bar{A}_{1\Delta} \cdots \bar{A}_{k\Delta}], \quad \bar{\bar{B}}_\Delta = [\bar{B}_{1\Delta} \cdots \bar{B}_{k\Delta}] \\ \bar{\bar{C}}_\Delta = [\bar{C}_{1\Delta} \cdots \bar{C}_{k\Delta}], \quad \bar{\bar{D}}_\Delta = [\bar{D}_{1\Delta} \cdots \bar{D}_{k\Delta}] \end{cases} \tag{8.3.28}$$

这里 $\bar{A}_\Delta$ 、 $\bar{A}_{i\Delta}$ 、 $\bar{B}_\Delta$ 、 $\bar{B}_{i\Delta}$ 、 $\bar{C}_\Delta$ 、 $\bar{C}_{i\Delta}$ 、 $\bar{D}_\Delta$ 、 $\bar{D}_{i\Delta}(i=1,2,\cdots,k)$ 分别表示参数不确定性。

我们分析系统(8.3.27)鲁棒 H_∞ 性能时，不失一般性，仍然假定 $k=1$ ，此时 $\bar{\Sigma}_\Delta$ 为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}_\Delta \bar{x}(t) + \bar{A}_{1\Delta}\bar{x}(t-h_1(t)) + \bar{B}_\Delta w + \bar{B}_{1\Delta} w(t-h_1(t)) + \bar{E}_1 \bar{f}_1(\sigma(t)) + \bar{E}_{11}\bar{f}_{11}(\sigma(t-h_1(t))) \\ z = \bar{C}_\Delta \bar{x}(t) + \bar{C}_{1\Delta}\bar{x}(t-h_1(t)) + D_{10\Delta} w + D_{11\Delta} w(t-h_1(t)) + E_{20} f_2 + E_{21} f_2(\sigma(t-h_1(t))) \end{cases} \tag{8.3.29}$$

其中

$$\bar{A}_\Delta = \bar{A} + \Delta\bar{A}, \quad \bar{A}_{1\Delta} = \bar{A}_1 + \Delta\bar{A}_1, \quad \bar{B}_\Delta = \bar{B} + \Delta\bar{B}, \quad \bar{B}_{1\Delta} = \bar{B}_1 + \Delta\bar{B}_1$$
$$\bar{C}_\Delta = \bar{C} + \Delta\bar{C}, \quad \bar{C}_{1\Delta} = \bar{C}_1 + \Delta\bar{C}_1, \quad D_{10\Delta} = D_{10} + \Delta D_{10}, \quad D_{11\Delta} = D_{11} + \Delta D_{11}$$

由不确定性描述式(8.3.5)可知，式(8.3.28)中的不确定性可以描述成如下的形式：

$$\Delta\bar{A} = \begin{bmatrix} \Delta A_0 & \Delta B_{20} C_c \\ B_c \Delta C_{20} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{11} \\ B_c G_{31} & 0 \end{bmatrix} F(x,t) \begin{bmatrix} H_{11} & \\ & H_{15} C_c \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} G_1 F(x,t) H_1$$

$$\Delta\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} \Delta A_1 & \Delta B_{21} C_c \\ B_c \Delta C_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{11} \\ B_c G_{31} & 0 \end{bmatrix} F(x,t) \begin{bmatrix} H_{12} & \\ & H_{16} C_c \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} G_1 F(x,t) H_2$$

$$\Delta\bar{B} = \begin{bmatrix} \Delta B_{10} \\ B_c \Delta D_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{11} \\ B_c G_{31} & 0 \end{bmatrix} F(x,t) \begin{bmatrix} H_{13} \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} G_1 F(x,t) H_3$$

$$\Delta\bar{B}_1=\begin{bmatrix}\Delta B_{11}\\ B_c\Delta D_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11} & G_{11}\\ B_cG_{31} & 0\end{bmatrix}F(x,t)\begin{bmatrix}H_{14}\\ 0\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}G_1F(x,t)H_4$$

$$\Delta\bar{C}=\begin{bmatrix}\Delta C_{10} & \Delta D_{20}C_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{21} & G_{21}\end{bmatrix}F(x,t)\begin{bmatrix}H_{11} & \\ & H_{15}C_c\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}G_2F(x,t)H_1$$

$$\Delta\bar{C}_1=\begin{bmatrix}\Delta C_{11} & \Delta D_{21}C_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{21} & G_{21}\end{bmatrix}F(x,t)\begin{bmatrix}H_{12} & \\ & H_{16}C_c\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}G_2F(x,t)H_2$$

$$\Delta D_{10}=\begin{bmatrix}G_{21} & G_{21}\end{bmatrix}F(x,t)\begin{bmatrix}H_{13}\\ 0\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}G_2F(x,t)H_3$$

$$\Delta D_{11}=\begin{bmatrix}G_{21} & G_{21}\end{bmatrix}F(x,t)\begin{bmatrix}H_{14}\\ 0\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}G_2F(x,t)H_4$$

式中，G_1、G_2、H_1、H_2、H_3、H_4为已知的具有适当维数的常值矩阵。

对于式(8.3.28)的 H_∞ 问题，我们有如下结果。

定理 8.3.2　考虑不确定 Lur'e 时滞控制系统(8.3.28)，对于给定的对角矩阵 K_1、K_2、K_3、K_{11}、K_{21}、K_{31}，当且仅当存在正定对称阵 P, S_1 和标量 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{11},\lambda_{21},\gamma>0$ 使得线性矩阵不等式(8.3.29)成立，则系统(3.8.4)在有限霍尔维茨角域的约束下鲁棒渐近稳定，并且满足 H_∞ 范数约束条件(8.3.13)，即 Σ_{spc} 为一鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器。

$$M_\Delta=\left[\begin{array}{cc|c}\begin{array}{c|c}M_N & \Omega_1\\ \hline \Omega_1^{\mathrm{T}} & -\gamma^{-1}I\end{array} & & \Omega_2^{\mathrm{T}}\\ \hline \Omega_2 & & -\gamma I\end{array}\right]<0 \tag{8.3.30}$$

其中

$$\Omega_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}G_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix},\quad \Omega_2=\begin{bmatrix}H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

证明　参考文献(Shi et al., 2000；Guo，2002)及定理 8.3.1 的证明，本文在此略去。

用同样的方法，我们可以通过 LMI 求解出输出反馈控制器 Σ_{spc}。这时 LMI 为

$$M''_{\Delta}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M''_N & \Omega''_1\\ \Omega''^{\mathrm{T}}_1 & -\gamma^{-1}I\end{bmatrix} & \Omega''^{\mathrm{T}}_2\\ \Omega''_2 & -\gamma I\end{bmatrix}<0 \tag{8.3.31}$$

其中

$$\Omega''^{\mathrm{T}}_1=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}G^{\mathrm{T}}_{11} & G^{\mathrm{T}}_{11}Q+G^{\mathrm{T}}_{31}F\\ G^{\mathrm{T}}_{11} & G^{\mathrm{T}}_{11}Q\end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix}G^{\mathrm{T}}_{21}\\ G^{\mathrm{T}}_{21}\end{bmatrix} & 0\end{bmatrix}$$

$$\Omega''_2=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{11}R & H_{11}\\ H_{15}G & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}H_{12} & \\ & H_{16}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}H_{13}\\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}H_{14}\\ 0\end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

设计鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器 Σ_{spc} 的方法与前面所讨论的一样。

8.3.4 数值仿真例子

例 8.3.1 考虑 Lur'e 时滞控制系统(8.3.12)，其中系统矩阵如下所示，设计出鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器 Σ_{spc}

$$A_0=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}-0.1 & -0.1\\ 0.3 & 0.2\end{bmatrix},\quad B_{10}=\begin{bmatrix}0.7\\ 0.8\end{bmatrix},\quad B_{11}=\begin{bmatrix}0.4\\ 0.3\end{bmatrix},\quad B_{20}=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.5\end{bmatrix}$$

$$B_{21}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.2\end{bmatrix},\quad C_{10}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\end{bmatrix},\quad C_{11}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.1\end{bmatrix},\quad C_{20}=\begin{bmatrix}1 & 0.4\\ 0.2 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$C_{21}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.05\end{bmatrix}$$

$$D_{10}=0.3,\quad D_{11}=0.2,\quad D_{20}=0.6,\quad D_{21}=0.7,\quad D_{30}=\begin{bmatrix}0.4\\ 0.2\end{bmatrix},\quad D_{31}=\begin{bmatrix}0.2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$E_{10}=\begin{bmatrix}0.4\\ 0.3\end{bmatrix},\quad E_{11}=\begin{bmatrix}0.14\\ 0.23\end{bmatrix},\quad E_{20}=0.4,\quad E_{21}=0.27,\quad E_{30}=\begin{bmatrix}0.7\\ 0.5\end{bmatrix},\quad E_{31}=\begin{bmatrix}0.18\\ 0.36\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0.4 & 0.6\end{bmatrix},\quad K_1=0.4,\quad K_2=0.6,\quad K_3=0.5,\quad K_{11}=0.3,\quad K_{21}=0.7,\quad K_{31}=0.1$$

取 $S_{11}=\mathrm{diag}\{0.5,0.5\}$，$S_{22}=1$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_{11}=\lambda_{21}=1$，求解 LMI：$R>0,Q>0$，与 $M''_N<0$，此时 LMI 存在可行性解的时滞界限为 $0<h_1\leqslant 0.62$，当 $h_1=0.62$ 时，解得

$$R=\begin{bmatrix}5.5831 & 2.0322\\ 2.0322 & 0.5831\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}3.3642 & 0.4227\\ 0.4227 & 0.0696\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}-9.0423 & 8.8923\\ 1.0314 & -2.4822\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}-2.7630 & 0.2141\\ -1.6440 & -2.3919\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}-2.7875 & -2.1140\end{bmatrix}$$

求解式(8.3.21)得

$$M=\begin{bmatrix}1.0000 & 0\\ 0.3800 & 1.0000\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}-18.6417 & 0\\ -2.5014 & 1.0509\end{bmatrix}$$

求解式(8.3.26)得

$$A_c=\begin{bmatrix}-3.1614 & -0.0780\\ -7.4009 & -1.8996\end{bmatrix},\quad B_c=\begin{bmatrix}0.4851 & -0.4770\\ 2.1361 & -3.4975\end{bmatrix},\quad C_c=\begin{bmatrix}-2.7875 & -1.0548\end{bmatrix}$$

开环、闭环系统的状态响应曲线分别如图 8.3.1、图 8.3.2 所示。此时控制输入为一斜坡信号。

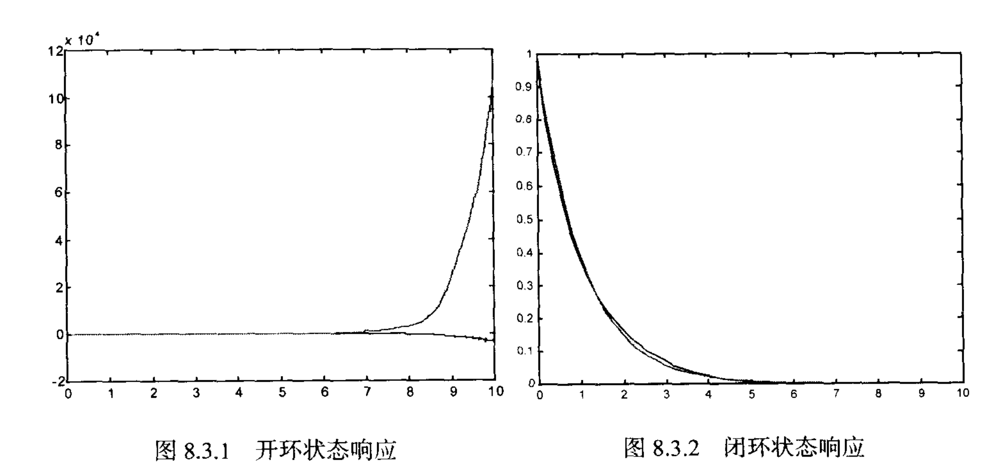


图 8.3.1　开环状态响应　　　　图 8.3.2　闭环状态响应

例 8.3.2　考虑 Lur'e 时滞控制系统(8.3.27)，系统矩阵为例 8.3.1 所示，设计出鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器 Σ_{spc}，这里

$$G_{11}=\begin{bmatrix}-0.2\\ 0.3\end{bmatrix},\quad G_{21}=0.15,\quad G_{31}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.6\end{bmatrix},\quad \gamma=1$$

$$H_{11}=\begin{bmatrix}0.2 & -0.1\end{bmatrix},\quad H_{12}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.4\end{bmatrix},\quad H_{13}=H_{14}=0.1,\quad H_{15}=0.2,\quad H_{16}=0.15$$

用 Matlab 求解得

$$R=\begin{bmatrix}5.5853 & 1.9774\\ 1.9774 & 0.5489\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}3.2066 & 0.4197\\ 0.4197 & 0.0600\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}-3.0041 & -0.0952\\ -1.5669 & -2.3495\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}-7.0015 & 5.9849\\ 1.2879 & -3.0510\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}-2.9009 & -2.2371\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}1.0000 & 0\\ 0.3704 & 1.0000\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}-17.7396 & 0\\ -2.3456 & 1.0385\end{bmatrix}$$

$$A_c=\begin{bmatrix}-2.8766 & -0.0962\\ -7.1161 & -1.9351\end{bmatrix},\quad B_c=\begin{bmatrix}0.3947 & -0.3374\\ 2.1316 & -3.6998\end{bmatrix},\quad C_c=\begin{bmatrix}-2.9009 & -1.1626\end{bmatrix}$$

8.4　不确定 Lur'e 系统可靠 H_∞控制

8.4.1　问题描述及故障模型

考虑如下的不确定 Lur'e 系统：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma:\ &\dot{x}(t)=A(\theta)x(t)+B_1(\theta)u(t)+D_1(\theta)w(t)+Ef(\sigma(t))\\ &x(0)=\phi(t),\sigma(t)=Cx(t)\\ &y(t)=C_1(\theta)x(t)+D_2(\theta)\eta(t)\\ &z(t)=C_2(\theta)x(t)+B_2(\theta)u(t)+D_3(\theta)w(t)\end{aligned}\right\}\tag{8.4.1}$$

其中，$x(t)\in R^n$ 为状态向量；$u(t)=[u_1(t)\ u_2(t)\cdots\ u_m(t)]\in R^m$ 为控制向量；$w(t)\in R^p$ 为平方可积的扰动输入向量，即 $w(t)\in L_2[0,\infty)$；$\eta(t)\in R^q$ 为平方可积的观测噪声，即 $\eta(t)\in L_2[0,\infty)$；$z(t)\in R^l$ 为控制输出向量；$y(t)=[y_1(t)\ y_2(t)\cdots\ y_q(t)]\in R^q$ 为观测输出向量；$A(\theta),B_1(\theta),B_2(\theta),C_1(\theta),C_2(\theta)$，$D_1(\theta),D_2(\theta)$ 和 $D_3(\theta)$ 为凸多面体不确定性，Liao 等(2002)用它来刻画飞行控制系统的整个控制表面的损耗程度，本文假定凸多面体不确定性具有如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}&A(\theta)=A_0+\sum_{i=1}^{k}A_i\theta_i,\quad B_1(\theta)=B_{10}+\sum_{i=1}^{k}B_{1i}\theta_i,\quad B_2(\theta)=B_{20}+\sum_{i=1}^{k}B_{2i}\theta_i\\ &C_1(\theta)=C_{10}+\sum_{i=1}^{k}C_{1i}\theta_i,\quad C_2(\theta)=C_{20}+\sum_{i=1}^{k}C_{2i}\theta_i,\quad D_1(\theta)=D_{10}+\sum_{i=1}^{k}D_{1i}\theta_i\\ &D_2(\theta)=D_{20}+\sum_{i=1}^{k}D_{2i}\theta_i,\quad D_3(\theta)=D_{30}+\sum_{i=1}^{k}D_{3i}\theta_i\end{aligned}\right\}\tag{8.4.2}$$

其中，A_i、B_{1i}、B_{2i}、C_{1i}、C_{2i}、D_{1i} 和 $D_{2i}(i=0,1,\cdots,k)$ 为已知的具有适当维数的矩阵，$\theta=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k]^{\mathrm T}\in R^k$ 既可能为不确定的实值常数参数向量，也可

能为实值时变的参数向量，即

$$\theta \in \Omega = \{\theta \in R^k : \theta_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1\} \tag{8.4.3a}$$

$$\theta(t) \in \Omega = \{\theta(t) \in R^k : \theta_i(t) \geqslant 0, \sum_{i=0}^{k} \theta_i(t) = 1\} \tag{8.4.3b}$$

定义 $\phi(t)$ 为 Banach 空间上的光滑连续函数，表示系统的初始条件。假定 $\phi^{\mathrm{T}}(t)\phi(t) \leqslant \xi$，$\xi > 0$ 为初始条件的上界。$\sigma = [\sigma_1(t)\ \sigma_2(t) \cdots \sigma_n(t)] \in R^n$，$f(\sigma) = [f_1(\sigma_1)\, f_2(\sigma_2) \cdots f_n(\sigma_n)] \in R^n$ 表示非线性的向量，每一个 $f_j(\sigma_j)$ 位于有限的霍尔维茨角域 1.3.2 里。

本文采用文献(Yang et al.，2001)所提出的连续故障模型，执行器故障模型为

$$u^f(t) = M_1 u(t) + M_u \delta_1(t) \tag{8.4.4}$$

式中，$M_1 = \mathrm{diag}\{m_{11}, m_{12}, \cdots, m_{1m}\}$ 被称为执行器故障矩阵，$M_u = \mathrm{diag}\{m_{u1}, m_{u2}, \cdots, m_{um}\}$ 为执行器故障扰动矩阵，$\delta_1(t) = [\delta_{11}(t)\ \delta_{12}(t) \cdots \delta_{1m}(t)] \in R^m$ 为平方可积的执行器故障扰动向量。每一个 m_{1i} 和 m_{ui} 满足

$$0 \leqslant \underline{m}_{1i} \leqslant m_{1i} \leqslant \bar{m}_{1i},\quad \bar{m}_{1i} \geqslant 1,\quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{8.4.5a}$$

$$0 \leqslant m_{ui} \leqslant \bar{m}_{ui},\quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{8.4.5b}$$

定义

$$\begin{aligned} M_{10} &= \mathrm{diag}\{\tilde{m}_{11}, \tilde{m}_{12}, \cdots, \tilde{m}_{1m}\} \\ J_1 &= \mathrm{diag}\{j_{11}, j_{12}, \cdots, j_{1m}\} \\ L_1 &= \mathrm{diag}\{l_{11}, l_{12}, \cdots, l_{1m}\} \end{aligned} \tag{8.4.6a}$$

$$\begin{aligned} M_{u0} &= \mathrm{diag}\{\bar{m}_{u1}/2, \bar{m}_{u2}/2, \cdots, \bar{m}_{um}/2\} \\ L_{u0} &= \mathrm{diag}\left\{\frac{m_{u1} - \bar{m}_{u1}/2}{\bar{m}_{u1}/2}, \frac{m_{u2} - \bar{m}_{u2}/2}{\bar{m}_{u2}/2}, \cdots, \frac{m_{um} - \bar{m}_{um}/2}{\bar{m}_{um}/2}\right\} \end{aligned} \tag{8.4.6b}$$

其中，$\tilde{m}_{1i} = \frac{1}{2}(\bar{m}_{1i} + \underline{m}_{1i}), j_{1i} = \frac{\bar{m}_{1i} - \underline{m}_{1i}}{\bar{m}_{1i} + \underline{m}_{1i}}, l_{1i} = \frac{m_{1i} - \tilde{m}_{1i}}{\tilde{m}_{1i}}$。由式(8.4.6)可以容易地得到

$$M_1 = M_{10}(I + L_1),\quad |L_1| \leqslant J_1 \leqslant I \tag{8.4.7a}$$

$$M_u = M_{u0}(I + L_{u0}),\quad |L_{u0}| \leqslant I \tag{8.4.7b}$$

类似地，传感器故障模型为

$$y^f(t) = M_2 y(t) + M_y \delta_2(t) \tag{8.4.8}$$

其中，$M_2 = \mathrm{diag}\{m_{21}, m_{22}, \cdots, m_{2q}\}$ 为传感器故障矩阵，$M_y = \mathrm{diag}\{m_{y1}, m_{y2}, \cdots, m_{yq}\}$ 为传感器故障扰动矩阵，$\delta_2(t) = [\delta_{21}(t)\ \delta_{22}(t) \cdots\ \delta_{2q}(t)] \in R^q$ 为平方可积的传感器故障扰动误差向量。每一个 m_{2i} 和 m_{yi} 满足

$$0 \leqslant \underline{m}_{2i} \leqslant m_{2i} \leqslant \bar{m}_{2i}, \quad \bar{m}_{2i} \geqslant 1, \quad i = 1, 2, \cdots, q \tag{8.4.9a}$$

$$0 \leqslant m_{yi} \leqslant \bar{m}_{yi}, \quad i = 1, 2, \cdots, q \tag{8.4.9b}$$

定义

$$\begin{aligned} M_{20} &= \mathrm{diag}\{\tilde{m}_{21}, \tilde{m}_{22}, \cdots, \tilde{m}_{2q}\} \\ J_2 &= \mathrm{diag}\{j_{21}, j_{22}, \cdots, j_{2q}\} \\ L_2 &= \mathrm{diag}\{l_{21}, l_{22}, \cdots, l_{2q}\} \end{aligned} \tag{8.4.10a}$$

$$\begin{aligned} M_{y0} &= \mathrm{diag}\{\bar{m}_{y1}/2, \bar{m}_{y2}/2, \cdots, \bar{m}_{yq}/2\} \\ L_{y0} &= \mathrm{diag}\left\{\frac{m_{y1} - \bar{m}_{y1}/2}{\bar{m}_{y1}/2}, \frac{m_{y2} - \bar{m}_{y2}/2}{\bar{m}_{y2}/2}, \cdots, \frac{m_{yq} - \bar{m}_{yq}/2}{\bar{m}_{yq}/2}\right\} \end{aligned} \tag{8.4.10b}$$

其中，$\tilde{m}_{2i} = \frac{1}{2}(\bar{m}_{2i} + \underline{m}_{2i}), j_{2i} = \frac{\bar{m}_{2i} - \underline{m}_{2i}}{\bar{m}_{2i} + \underline{m}_{2i}}, l_{2i} = \frac{m_{2i} - \tilde{m}_{2i}}{\tilde{m}_{2i}}$. 从式(8.4.10)也能推出

$$M_2 = M_{20}(I + L_2), \quad |L_2| \leqslant J_2 \leqslant I \tag{8.4.11a}$$

$$M_y = M_{y0}(I + L_{y0}), \quad |L_{y0}| \leqslant I \tag{8.4.11b}$$

注 8.4.1　$m_{1i} = 0, m_{ui} = 0$ 或 $m_{2i} = 0, m_{yi} = 0$ 对应于执行器或传感器第 i 条通道的完全失效。$m_{1i} = 1, m_{ui} = 0$ 或 $m_{2i} = 1, m_{yi} = 0$ 对应于执行器或传感器第 i 条通道正常运转。$\underline{m}_{1i} > 0$ 或 $\underline{m}_{2i} > 0$ 对应于执行器或传感器第 i 条通道的部分失效。

定义 8.4.1(可靠 H_∞ 输出反馈控制问题)　考虑不确定 Lur'e 系统 Σ，设计一个如下的输出反馈控制器：

$$\begin{aligned} \Sigma_c:\ \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + C_c y(t), x_c(0) = 0 \\ u(t) &= B_c x_c(t) \end{aligned} \tag{8.4.12}$$

对于给定的 $\gamma > 0, \rho > 0$，所有非零的 $w(t), \eta(t) \in L_2[0, \infty)$，以及所有的不确定性，

无论所有控制元件是否运转正常还是失效，闭环系统不仅是渐近稳定的而且满足

$$\int_0^{\infty} z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t < \gamma^2\left(\int_0^{\infty} w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \eta^{\mathrm{T}}(t)\eta(t)\mathrm{d}t + \rho\right) \tag{8.4.13}$$

则把控制器 Σ_c 叫做可靠 H_∞ 控制器。

注 8.4.2　由不等式(8.4.13)所描述的性能指标与一般的 H_∞ 性能指标(Su et al.，1997c)不一样，它包含了标量 $\rho > 0$，这是由于系统的初始条件所引起的。

首先，引入如下引理。

引理 8.4.1　假定 Γ 和 Ξ 是具有适当维数的实常值矩阵，如果时变对角矩阵 $F(t)$ 满足 $|F(t)| < U$（U 是一个已知的实常值矩阵)，则存在 $\varepsilon > 0$，使得下述不等式成立：

$$\Gamma F(t)\Xi + (\Gamma F(t)\Xi)^{\mathrm{T}} \leqslant \varepsilon \Gamma U \Gamma^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\Xi^{\mathrm{T}} U \Xi$$

证明　参考 Wang 等(1992)的引理的证明，本文在此略去。

引理 8.4.2　对于 $u(t)=0$ 和给定的 $\gamma > 0, \rho > 0$，考虑不确定 Lur'e 系统(8.4.1)，如果所有 $(A_i, C_{2i}), i = 0,1,\cdots,k$ 是可观测对，且存在一个对称矩阵 $P > 0$ 和标量 $\varepsilon > 0$，对所有 $i = 1,\cdots,k$，满足

$$\begin{bmatrix} \Pi & P(D_{10}+D_{1i}) & (C_{20}+C_{2i})^{\mathrm{T}} & PE & C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & (D_{30}+D_{3i})^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \tag{8.4.14a}$$

$$P \leqslant \frac{\rho}{\xi}\gamma I \tag{8.4.14b}$$

其中，$\Pi = (A_0 + A_i)^{\mathrm{T}} P + P(A_0 + A_i), K = \mathrm{diag}\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$，$*$ 表示矩阵对称项，下同。则不确定 Lur'e 系统 Σ 是渐近稳定的，并且具有 H_∞ 性能。即，对所有非零的 $w(t) \in L_2[0,\infty)$，$\int_0^{\infty} z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t < \gamma^2\left(\int_0^{\infty} w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t + \rho\right)$。

证明　考虑如下的 Lyapunov 函数：

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$$

类似于式 8.2.10 的推导，由霍尔维茨角域等价性可得

$$f^{\mathrm{T}} f \leqslant x^{\mathrm{T}}(t) C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} K C x(t) \tag{8.4.15}$$

因此，由引理 8.4.1 及不等式(8.4.15)可得

$$2x^{\mathrm{T}}(t) PEf(\sigma(t)) \leqslant \varepsilon^{-1} x^{\mathrm{T}}(t) PEE^{\mathrm{T}} Px(t) + \varepsilon x^{\mathrm{T}}(t) C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} KCx(t) \tag{8.4.16}$$

另一方面，Yedavalli(1993)及 Gahinet 等(1996)指出，如果不等式(8.4.14a)成立，则

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}(\theta)P + PA(\theta) & PD_1(\theta) & C_2^{\mathrm{T}}(\theta) & PE & C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & D_3^{\mathrm{T}}(\theta) & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \tag{8.4.17}$$

根据 Schur 补引理，从不等式(8.4.17)可以推出 $A^{\mathrm{T}}(\theta)P + PA(\theta) < 0$，因此，由文献(Yedavalli，1993)立刻可以得到 $x(t)$ 是渐近稳定的。而且，由不等式(8.4.16)和(8.4.17)能容易地得到

$$\dot{V}(x,\theta) + \gamma^{-1} z^{\mathrm{T}}(t) z(t) - \gamma w^{\mathrm{T}}(t) w(t) < 0 \tag{8.4.18}$$

则对所有非零的 $w(t) \in L_2[0,\infty)$，$\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t - \gamma^2 \int_0^\infty w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t < x^{\mathrm{T}}(0)Px(0) \leqslant \gamma^2 \rho$。综上所述，引理 8.8.4 得证。

8.4.2 具有执行器故障的可靠控制器的设计

定义 $\varphi = [x^{\mathrm{T}}(t) \;\; x_c^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$，考虑执行器故障模型(8.4.4)，则对于不确定 Lur'e 系统$\varSigma$，当执行器故障发生时，在线性反馈控制律(8.4.12)作用下，闭环系统写成如下的形式：

$$\varSigma_1: \quad \left.\begin{aligned} &\dot{\varphi} = \tilde{A}(\theta)\varphi + \tilde{D}_1(\theta)\tilde{w} + \tilde{E}\tilde{f}(\tilde{\sigma}) \\ &\varphi(0) = [\phi^{\mathrm{T}}(t) \;\; 0]^{\mathrm{T}}, \tilde{\sigma} = \tilde{C}\varphi \\ &z = \tilde{C}(\theta)\varphi + \tilde{D}_2(\theta)\tilde{w} \end{aligned}\right\} \tag{8.4.19}$$

其中，$\tilde{w} = [w^{\mathrm{T}}(t) \;\; \eta^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}, \tilde{f}(\tilde{\sigma}) = [f^{\mathrm{T}}(\tilde{\sigma}) \;\; 0]^{\mathrm{T}}$，且

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不确定性能被重新写成如下的形式：

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}(\theta) &= \tilde{A}_0 + \sum_{i=1}^{k} \tilde{A}_i \theta_i, \quad \tilde{D}_1(\theta) = \tilde{D}_{10} + \sum_{i=1}^{k} \tilde{D}_{1i} \theta_i \\
\tilde{C}(\theta) &= \tilde{C}_0 + \sum_{i=1}^{k} \tilde{C}_i \theta_i, \quad \tilde{D}_2(\theta) = \tilde{D}_{20} + \sum_{i=1}^{k} \tilde{D}_{2i} \theta_i
\end{aligned} \tag{8.4.20}
$$

其中

$$
\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_{10} M_1 B_c \\ C_c C_{10} & A_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} M_1 B_c \\ C_c C_{1i} & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, k
$$

$$
\tilde{D}_{1i} = \begin{bmatrix} D_{1i} & 0 & B_{1i} M_u \\ 0 & C_c D_{2i} & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \cdots, k, \quad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_{2i} & B_{2i} M_1 B_c \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \cdots, k
$$

$$
\tilde{D}_{2i} = \begin{bmatrix} D_{3i} & 0 & B_{2i} M_u \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \cdots, k
$$

如下的定理 8.4.1 给出了本章的主要结果。

定理 8.4.1　对于给定的 $\gamma > 0, \rho > 0$，考虑不确定 Lur'e 系统 Σ_1，如果所有 $(A_i, C_{2i}), i = 0, 1, \cdots, k$ 是可观测对，且存在一个对称矩阵 $X > 0, Y > 0$，矩阵 G、H、F 和标量 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$，对所有 $i = 1, \cdots, k$，满足

$$
\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{8.4.21a}
$$

$$
\Theta = \begin{bmatrix}
\Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} & \Theta_{15} & \Theta_{16} & \Theta_{17} \\
* & -\gamma I & \Theta_{23} & 0 & 0 & \Theta_{26} & 0 \\
* & * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & \Theta_{37} \\
* & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\varepsilon_2^{-1} I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I
\end{bmatrix} < 0 \tag{8.4.21b}
$$

$$
Y - \frac{\rho}{\xi} \gamma I \leqslant 0 \tag{8.4.21c}
$$

其中

$$
\Theta_{11} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & H^{\mathrm{T}} + (A_0 + A_i) \\ * & \Delta_{22} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{11} = \mathrm{sym}[(A_0 + A_i) X + (B_{10} + B_{1i}) M_{10} G]
$$

$$\Delta_{22} = \mathrm{sym}[Y(A_0 + A_i) + F(C_{10} + C_{1i})]$$

$$\Theta_{12} = \begin{bmatrix} D_{10} + D_{1i} & 0 & (B_{10} + B_{1i})M_{u0} \\ Y(D_{10} + D_{1i}) & F(D_{20} + D_{2i}) & Y(B_{10} + B_{1i})M_{u0} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{14} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ YE & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{13} = \begin{bmatrix} X(C_{20} + C_{2i})^{\mathrm{T}} + G^{\mathrm{T}} M_{10} (B_{20} + B_{2i})^{\mathrm{T}} \\ (C_{20} + C_{2i})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{15} = \begin{bmatrix} XC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & 0 \\ C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{16} = \begin{bmatrix} G^{\mathrm{T}} J_1^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_{17} = \begin{bmatrix} (B_{10} + B_{1i})M_{10}J_1^{1/2} & (B_{10} + B_{1i})M_{u0} \\ Y(B_{10} + B_{1i})M_{10}J_1^{1/2} & Y(B_{10} + B_{1i})M_{u0} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{23} = \begin{bmatrix} (D_{30} + D_{3i})^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ M_{u0}(B_{20} + B_{2i})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{26} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{37} = \begin{bmatrix} (B_{20} + B_{2i})M_{10}J_1^{1/2} & (B_{20} + B_{2i})M_{u0} \end{bmatrix}$$

则不确定 Lur'e 系统 Σ_1 是渐近稳定的，并且具有 H_∞ 性能。即对所有非零的 $w(t),\eta(t),\delta_1(t) \in L_2[0,\infty)$

$$\|z(t)\|_2^2 < \gamma^2(\|w(t)\|_2^2 + \|\eta(t)\|_2^2 + \|\delta_1(t)\|_2^2 + \rho) \tag{8.4.22}$$

相应的输出反馈控制器 Σ_c 可通过下式进行求解：

$$\begin{aligned} &F = NC_c, \quad G = B_c V^{\mathrm{T}} \\ &H = Y(A_0 + A_i)X + F(C_{10} + C_{1i})X + Y(B_{10} + B_{1i})M_{10}G + NA_c V^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{8.4.23}$$

式中，N 和 V 为可逆矩阵，满足

$$VN^{\mathrm{T}} = I - XY \tag{8.4.24}$$

证明　从 Yang 等(2001)引理 1 的证明可以得到，如果 $(A_i, C_{2i}), i = 0,1,\cdots,k$ 是一可观对，则 $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_i)(i = 0,1,\cdots,k)$ 也是可观测对。因此，从引理 8.4.2 可以得到，对于给定的 $\gamma > 0, \rho > 0$，如果存在一个对称正定矩阵 $P > 0$ 和一个标量 $\varepsilon_1 > 0$，对所有 $i = 1,\cdots,k$，满足

$$\tilde{\Theta}=\begin{bmatrix}(\tilde{A}_0+\tilde{A}_i)^{\mathrm{T}}P+P(\tilde{A}_0+\tilde{A}_i) & P(\tilde{D}_0+\tilde{D}_i) & (\tilde{C}_0+\tilde{C}_i)^{\mathrm{T}} & P\tilde{E} & \tilde{C}^{\mathrm{T}}\tilde{K}^{\mathrm{T}}\\ (\tilde{D}_0+\tilde{D}_i)^{\mathrm{T}}P & -\gamma I & 0 & 0 & 0\\ \tilde{C}_0+\tilde{C}_i & 0 & -\gamma I & 0 & 0\\ \tilde{E}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0\\ \tilde{K}\tilde{C} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1}I\end{bmatrix}<0 \quad (8.4.25a)$$

$$\varphi^{\mathrm{T}}(0)P\varphi(0)\leqslant\rho\gamma \quad (8.4.25b)$$

其中，$\tilde{K}=\mathrm{diag}\{K,0\}$。则不确定 Lur'e 系统 Σ_1 是渐近稳定的，并且具有 H_∞ 性能。即对所有非零的 $\tilde{w}(t)\in L_2[0,\infty)$，不等式(8.4.22)成立。

使用 Guo(2002)同样的方法，令

$$P=\begin{bmatrix}I & Y\\ 0 & N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & I\\ V^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}^{-1}=X_2X_1^{-1} \quad (8.4.26)$$

其中，N 和 V 为可逆矩阵，满足(8.4.24)；$X>0,Y>0$ 满足(8.4.21a)。

把式(8.4.26)代入不等式(8.4.25a)中，同时在 $\tilde{\Theta}$ 的左右两边分别乘上 $\mathrm{diag}\{X_1^{\mathrm{T}},I,I,I\}$ 和 $\mathrm{diag}\{X_1,I,I,I\}$，并且考虑如下的不等式：

$$\left\|\begin{bmatrix}L_1^{\mathrm{T}} & \\ & L_{u0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}L_1 & \\ & L_{u0}\end{bmatrix}\right\|\leqslant\left\|\begin{bmatrix}J_1 & \\ & I\end{bmatrix}\right\|$$

利用引理 8.4.1 与 Schur 补引理，经过计算可以得到，如果不等式(8.4.21b)成立，则 $\tilde{\Theta}<0$，即不等式(8.4.25a)成立。另一方面，由式(8.4.26)可得

$$\varphi^{\mathrm{T}}(0)P\varphi(0)=\varphi^{\mathrm{T}}(0)X_2X_1^{-1}\varphi(0)=\begin{bmatrix}\phi^{\mathrm{T}}(t) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y & N\\ N^{\mathrm{T}} & -N^{\mathrm{T}}XV^{-\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi(t)\\ 0\end{bmatrix}=\phi^{\mathrm{T}}(t)Y\phi(t)$$

所以，当不等式(8.4.21c)成立时，$\varphi^{\mathrm{T}}(0)P\varphi(0)\leqslant\rho\gamma$，即不等式(8.4.25b)成立。综上所述，定理 8.4.1 得证。

注 8.4.3　定理 8.4.1 提出了设计可靠控制器的算法。算法为

(1) 如果 γ 给定，对于 $i=1,\cdots,k$，求最优问题 $\min\mathrm{imize}\ \mathrm{trace}(Y)$，约束条件为 $X>0,Y>0$，LMIs (8.4.21a)、(8.4.21b)和(8.4.21c)。解得凸最优的 X_{opt}、Y_{opt}、F_{opt}、G_{opt} 和 H_{opt}，然后分别通过解方程(8.4.23)和(8.4.24)解出可靠控制器的参数矩阵 A_c、B_c、C_c。

(2) 如果 γ 没有给定，对于 $i=1,\cdots,k$，求最优问题 minimize γ，约束条件为

$X>0,Y>0$，LMIs (8.4.21a)、(8.4.21b)和(8.4.21c)。解出$\gamma_{\min}$，令$\gamma=\gamma_{\min}$，重复步骤(1)，解出可靠控制器的参数矩阵A_c,B_c,C_c。

注 8.4.4 定理8.4.1是通过引理8.4.2得到的，它提出了一个保证不确定Lur'e系统具有渐近稳定性和H_∞性能的充分条件，可靠控制器参数矩阵的获得是基于线性矩阵不等式，而不是文献(Yang et al.，2001)给出的黎卡提方程。而且由于使用一般的Lyapunov函数($V(x)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$)，而不是文献(Liao et al.，2002)使用的仿射Lyapunov函数($V(x)=x^{\mathrm{T}}(t)P(\theta)x(t)$)，因此使得设计方法具有一定的保守性。但由于本文考虑了不确定性，初始条件与非线性因素对系统解的影响，可靠控制器的设计方法总体的保守性仍然没有增大。当$\underline{m}_{1i}=\bar{m}_{1i}=1,\delta_1(t)=0$时，本文提出的可靠$H_\infty$控制器的设计方法简化成文献(Gahinet et al.，1996)与文献(Su et al.，1997c)提出的正常H_∞控制器的设计方法。

8.4.3 具有传感器故障的可靠控制器的设计

当传感器故障发生的时候，对于不确定Lur'e系统Σ，在线性的输出反馈控制律(8.4.12)作用下，闭环系统写成如下的形式：

$$\Sigma_2:\quad \left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}=\tilde{A}'(\theta)\varphi+\tilde{D}_1'(\theta)\tilde{w}'+\tilde{E}\tilde{f}(\tilde{\sigma})\\&\varphi(0)=[\phi^{\mathrm{T}}(t)\ \ 0]^{\mathrm{T}},\tilde{\sigma}=\tilde{C}\varphi\\&z=\tilde{C}'(\theta)\varphi+\tilde{D}_2'(\theta)\tilde{w}'\end{aligned}\right\}\tag{8.4.27}$$

其中，$\tilde{w}'=[w^{\mathrm{T}}(t)\ \ \eta^{\mathrm{T}}(t)\ \ \delta_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$，$\varphi,\tilde{E},\tilde{C}$和$\tilde{f}(\tilde{\sigma})$与系统$\Sigma_1$中所定义的完全一样。不确定性系统矩阵能被写成类似于(8.4.2)所描述的形式，即

$$\tilde{A}_0'=\begin{bmatrix}A_0 & B_{10}B_c\\ C_cM_2C_{10} & A_c\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_i'=\begin{bmatrix}A_i & B_{1i}B_c\\ C_cM_2C_{1i} & 0\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,k$$

$$\tilde{D}_{1i}'=\begin{bmatrix}D_{1i} & 0 & 0\\ 0 & C_cM_2D_{2i} & C_cM_y\end{bmatrix},\quad i=0,1,\cdots,k,\quad \tilde{C}_i'=\begin{bmatrix}C_{2i} & B_{2i}B_c\end{bmatrix},\quad i=0,1,\cdots,k$$

$$\tilde{D}_{2i}=\begin{bmatrix}D_{3i} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad i=0,1,\cdots,k$$

类似于上一节的分析，下面的定理8.4.2给出了当系统出现传感器故障时的可靠H_∞控制器的设计方法。

定理 8.4.2 对于给定的$\gamma>0,\rho>0$，考虑不确定Lur'e系统Σ_2，如果所有$(A_i,C_{2i}),i=0,1,\cdots,k$是可观测对，且存在一个对称矩阵$X>0,Y>0$，矩阵$G$、$H$、$F$和标量$\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$，对所有$i=1,\cdots,k$，满足

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{8.4.28a}$$

$$Y - \frac{\rho}{\xi}\gamma I \leqslant 0 \tag{8.4.28b}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} & \Theta_{15} & \Theta_{16} & \Theta_{17} \\ * & -\gamma I & \Theta_{23} & 0 & 0 & 0 & \Theta_{27} \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_2^{-1} I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{8.4.28c}$$

其中

$$\Theta_{11} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & H^{\mathrm{T}} + (A_0 + A_i) \\ * & \Delta_{22} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{11} = \mathrm{sym}[(A_0 + A_i)X + (B_{10} + B_{1i})G]$$

$$\Delta_{22} = \mathrm{sym}[Y(A_0 + A_i) + FM_{20}(C_{10} + C_{1i})]$$

$$\Theta_{12} = \begin{bmatrix} D_{10} + D_{1i} & 0 & 0 \\ Y(D_{10} + D_{1i}) & FM_{20}(D_{20} + D_{2i}) & FM_{y0} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{14} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ YE & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{13} = \begin{bmatrix} X(C_{20} + C_{2i})^{\mathrm{T}} + G^{\mathrm{T}}(B_{20} + B_{2i})^{\mathrm{T}} \\ (C_{20} + C_{2i})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{15} = \begin{bmatrix} XC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & 0 \\ C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ FM_{20}J_2^{1/2} & FM_{y0} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{17} = \begin{bmatrix} X(C_{10} + C_{1i})J_2^{1/2} & 0 \\ (C_{10} + C_{1i})J_2^{1/2} & Y(B_{10} + B_{1i})M_{u0} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{23}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} D_{30} + D_{3i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_{37}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & J_2^{1/2}(D_{20} + D_{2i}) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

则不确定 Lur'e 系统 Σ_1 是渐近稳定的，并且具有 H_∞ 性能。即对所有非零的 $w(t), \eta(t), \delta_2(t) \in L_2[0, \infty)$

$$\|z(t)\|_2^2 < \gamma^2(\|w(t)\|_2^2 + \|\eta(t)\|_2^2 + \|\delta_1(t)\|_2^2 + \rho) \tag{8.4.29}$$

相应的输出反馈控制器 Σ_c 可通过下式进行求解：

$$F = NC_c, \quad G = B_c V^{\mathrm{T}}$$
$$H = Y(A_0 + A_i)X + FM_{20}(C_{10} + C_{1i})X + Y(B_{10} + B_{1i})G + NA_c V^{\mathrm{T}} \tag{8.4.30}$$

其中，N 和 V 为满足式(8.4.24)的可逆矩阵。

证明 与定理 8.4.1 的证明类似，在此略去。

值得注意的是注 8.4.3 与注 8.4.4 同样适用于传感器出现故障时的情况。

8.4.4 数值仿真例子

例 8.4.1 考虑不确定 Lur'e 系统$\Sigma(k=2)$，其参数矩阵为

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.8 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad D_{10} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.5 & \\ & 0.7 \end{bmatrix}, \quad C_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_{11} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad C_{12} = 0$$

$$C_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{20} = 1, \quad B_{21} = 0.3, \quad B_{21} = 0$$

$$D_{20} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0, \quad D_{30} = 0.7, \quad D_{31} = 0.25, \quad D_{32} = 0.13$$

$$\theta_1 = \frac{1 - \sin t}{2}, \quad \theta_2 = \frac{1 + \sin t}{2}, \quad \xi = 2.5, \quad \rho = 0.83, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

假定执行器 $u(t)$ 发生故障，接收到的信号为原控制信号的 30%，即 $\underline{m}_{11} = 0.3, \bar{m}_{11} = 1, \bar{m}_{u1} = 0.47$。扰动输出 $w(t)$，观测噪声 $\eta(t)$，执行器故障扰动 $\delta_1(t)$ 均为平方可积的随机噪声，其方差分别为 0.02，0.01，0.01。从上面的参数矩阵可以看出，$(A_i, C_{2i})(i = 0,1,2)$ 是可观测对。根据注 8.4.3 提出的算法，通过 Matlab/LMI toolbox 解得 $\gamma = \gamma_{\min} = 3.5$，相应的可靠控制器参数为

$$A_c = 10^5 \times \begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0001 \\ 7.2393 & -0.8459 \end{bmatrix}, \quad B_c = 10^8 \times \begin{bmatrix} -0.3795 & -1.0483 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & -0.0001 \\ 0.0011 & -0.0010 \end{bmatrix}$$

表 8.4.1 概括了各种故障条件下的正常 H_∞ 控制器作用下的闭环系统的 H_∞ 范数(称之为正常 H_∞ 范数)与可靠 H_∞ 控制器作用下的闭环系统的 H_∞ 范数(可靠 H_∞ 范数)之间的比较。从表 8.4.1 可以看出，当 $0.3 \leqslant m_{11} \leqslant 1$ 时，可靠 H_∞ 范数总是小于设计值 $\gamma_{\min} = 3.5$，正常 H_∞ 范数总是小于设计值 $\gamma_{\min} = 2.69$，且正常 H_∞ 范数总是小于可靠 H_∞ 范数；但当 $0 \leqslant m_{11} < 0.3$ 时，可靠 H_∞ 范数却大于设计值 $\gamma_{\min} = 3.5$，正常 H_∞ 范数也大于设计值 $\gamma_{\min} = 2.69$，且正常 H_∞ 范数总是大于可靠 H_∞ 范数；当 m_{11} 按趋于零的方向越来越小时，正常 H_∞ 范数越来越大，正常 H_∞ 控制器使系统保持稳定的能力越来越弱，甚至不能使系统保持稳定($m_{11} = 0$)，然而可靠 H_∞ 控制器却仍然使系统保持稳定。这些性质可通过仿真例子进一步的得到验证。图 8.4.1 和图 8.4.2 描述了在没有故障的情况下，分别通过正常 H_∞ 控制器和可靠 H_∞ 控制器作用的闭环系统的状态响应曲线，从图 8.4.1 和图 8.4.2 可以看出，通过正常 H_∞ 控制器作用的闭环系统的状态响应曲线要好于通过可靠 H_∞ 控制器作用的闭环系统的状态响应曲线(按照收敛的速度进行比较)。图 8.4.3 和图 8.4.4 则描述了有故障的情况下的闭环系统的状态响应曲线，从图 8.4.3 和图 8.4.4 可以看出，通过正常 H_∞ 控制器作用的闭环系统不稳定，而通过可靠 H_∞ 控制器作用的闭环系统却仍然保持稳定。这些性质，与文献(Yang et al.，2001)通过解黎卡提方程所得出的结果基本上吻合。

表 8.4.1　闭环系统的 H_∞ 性能

设计方法 ($\bar{m}_{u1} = 0.47$)	没有故障 $m_{11} = 1$	有故障				
		$m_{11} = 0.6$	$m_{11} = 0.3$	$m_{11} = 0.15$	$m_{11} = 0.075$	$m_{11} = 0$
可靠 H_∞ ($\gamma_d = 3.50$)	3.50	3.26	3.05	3.62	8.12	12.26
标准 H_∞ ($\gamma_{\min} = 2.69$)	2.69	3.39	5.68	8.49	60.28	不稳定

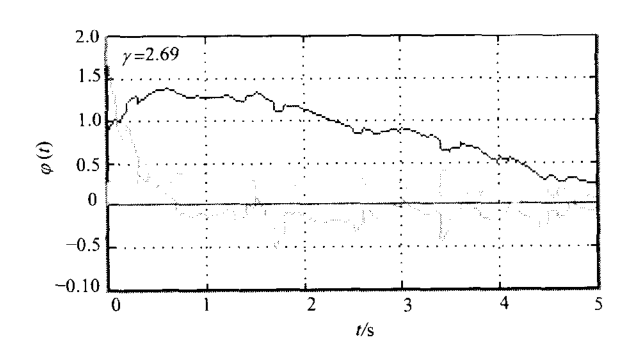


图 8.4.1　没有故障的正常 H_∞ 控制器作用下的闭环系统状态响应曲线

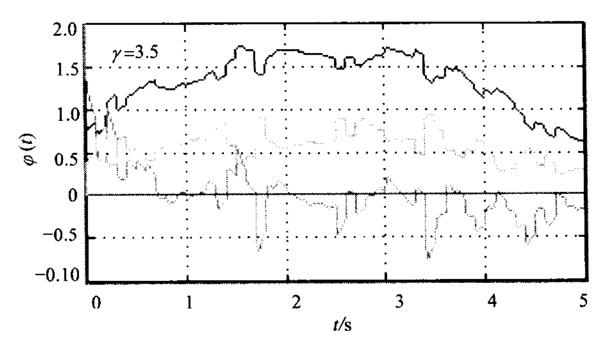


图 8.4.2　没有故障的可靠 H_∞ 控制器作用下的闭环系统状态响应曲线

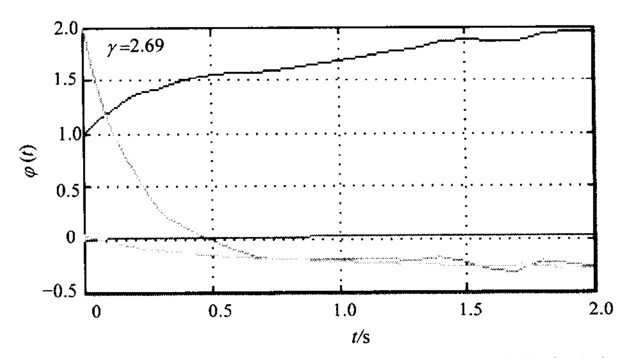


图 8.4.3　有故障的正常 H_∞ 控制器作用下的闭环系统状态响应曲线

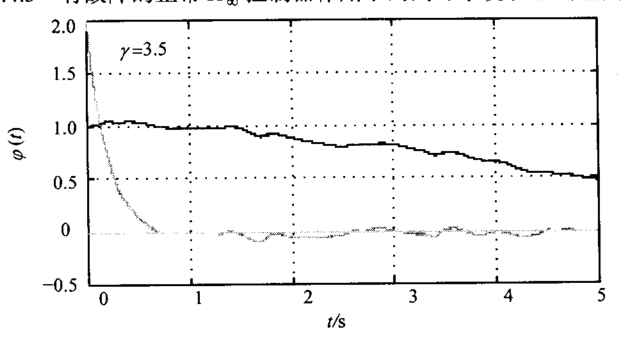


图 8.4.4　有故障的可靠 H_∞ 控制器作用下的闭环系统状态响应曲线

8.5　注　　记

本章来源于作者的研究成果。

参 考 文 献

Ackerman J. 1985. Sampled-Data Control Systems. Berlin: Springer.

de Souza C E, Li X, 1999. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems.

Automatica, 35: 1313-1321.

Fridman E, Shaked U. 2002. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 47: 253-279.

Fujita M, Shimenura E. 1988. Integrity against arbitrary feedback-loop failure in linear multivariable control systems. Automatica, 24(6): 765-772.

Gahinet P, Apkarian P, Chilali M. 1996. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and realparametric uncertainty. IEEE Tarns. Automat. Contr., 41(3):436-442.

Gao H J, Wang C H. 2002. Comments and further results on a "descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems". IEEE Trans. Automat. Contr., 520-525.

Guo, L. 2002. H_∞ output feedback control for delay systems with nonlinear and parametric uncertainties. IEE Proc. Control Theory and applications, 149(3): 226-236.

Hale J K. 1993. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag.

Hale J K. 1977. Theory of functional differential equation. New York: Springer-Verlag.

Leland P M, Medanic J V, Perkins W R. 1994. Reliable H infinity norm bounding controllers with redundant control elements, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 2, 1 1536-1541.

Liao F, Wang J L, Yang G H. 2002. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach. IEEE Trans on Control Systems Technology, 10(1): 76-89.

Park C W, Kang H J, Yee Y H. 2002. Numerical robust stability analysis of fuzzy feedback linearization regulator based on linear matrix inequality approach. IEE Proc. Control Theory Appl., 149: 82-88.

Popov V M, Halanay A. 1962. About stability of nonlinear controlled systems with delay. Automat Remote Control, 23(7): 849-851.

Rapopert L B. 1987. Problem of absolute stability of control systems with several nonlinear stationary compositions. Automat. Telemekh., 5: 66-74.

Schoen G M, Geering H P. 1995. A note on robustness bounds for large-scale time-delay systems. Int. J. Systems Sci., 26: 2441-2444.

Shen J C, Kung F C. 1989. Stabilization of input-delay systems with saturating actuators. Int. J. Control, 50: 1667-1680.

Shi P, Boukas E, Agarwal R K. 2000. Robust H_∞ control of singular continuous-time systems with delays and uncertainties. IEE Proc. Decision and Control, 1515-1520.

Shi P, Boukas E. 1997. H_∞ control for Markovian jumping linear system with parametric uncertainty. J. Optimiz. Theory Appl., 95: 75-99.

Shi P, Dragan V. 1999. Asymptotic H_∞ control of singular perturbed systems with parametic uncertainties. IEEE Trans. Automat. Control, 44(9): 1738-1742.

Soch C B. 1990. Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices. Int. J. Control, 51: 243-248.

Somolines A. 1877. Stability of Lur'e-type functional equations. J. Diff. Eguations, 26(2): 191-199.

Su H Y, Chu J, Wang J C, Wang S Q, Yu L. 1997a. Robust stabilizing control for a class of uncertain time-delay systems with output feedback. IFAC Sym. Advanced Control in Chemical Process (ADCHEM)'97, Banff, Canada, 149-154.

Su H Y, Chu J, Wang J C. 1998. A memoryless robust stabilizing control for a class of uncertain linear time-delay systems. Int. J. Systems Sci., 29(2): 191-197.

Su H Y, Chu J. 1999. Stabilization of a class of uncertain time-delay systems containing saturating actuators. Int. J. Robust Nonlinear Contr., 30: 1193-1203.

Su H Y, Lam J, Chu J. 1999. Robust controller design for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. 14th IFAC'1999, Beijing, 145-150.

Su H Y, Liu F, Chu J. 2001. Robust stabilization of uncertain time-delay systems containing saturating actuators.

IEE Proc. Control Theory Appl., 148: 323-328.

Su H Y, Wang J C, Yu L, Chu J. 1997b. Dynamic output feedback stabilizing control for linear time-varying uncertain systems with delayed state and control. Proc. 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California, USA, 4562-4567.

Su H Y, Wang J C, Yu L. 1997c. Robust memoryless H_∞ controller design for a class of time-varying uncertain linear time-delay systems. Proceeding of ACC'97, Albuquerque NM, USA, 3662-3663.

Su T J, Lu C Y, Tsai J S H. 2001. LMI approach to delay-dependent robust stability for uncertain time-delay systems. IEE Proc. Control Theory Appl., 148: 209-212.

Sun W, Nagpal K M, Khargonekar P P. 1993. H_∞ control and filtering for sampled-data systems. IEEE Trans. Automat. Control, 38: 1162-1175.

Sun Y J, Hsieh J G, Yang H C. 1997. On the stability of uncertain systems with multiple time-vary delays. IEEE Trans. Automat. Control, 42: 101-105.

Takaba K, Morihara N, Katayama T. 1994. H_∞ control for descriptor systems-a J-spectral factorization approach. Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, 2251-2256.

Takaba K, Morihara N, Katayama T. 1995. A generalized Lyapunov theorem for descriptor systems. Syst. Control Lett., 24: 49-51.

Tarbouriech S, Garcia G. 1997. Control of uncertain systems with bounded input. Lecture Notes in Contr. and Inform. Sci., London, U. K.: Springer-Verlag.

Tarbouriech S, Gomes J M, de Silva J R. 2001. Synthesis of controllers continuous-time delay systems with saturating controls via LMI's. IEE Proc. Control Theory Appl., 148: 123-130.

Tarbouriech S, Peres P L, Garcia D G, Queinnec I. 2002. Delay-dependent stabilization and disturbance tolerance for time-delay systems subject to actuator saturation. IEE Proc. Control Theory Appl., 149: 387-393.

Tesi A, Vicino A. 1991. Robust absolute stability of Lur'e control systems in parameter space. Automatica, 27(1): 147-151.

Veillette R J, Medanic J V, Perkins W R. 2000. Design of reliable control systems. IEEE Trans Automat Contr., 45: 1215-1221.

Wang Y Y, Xie L H, de Souza E. 1992. Robust control of uncertain nonlinear systems. Systems & Control Letters, 19(2):139-149.

Wang Z D, Chen X M, Guo Z. 1995. Controllers design with variance and circular pole constraints for continuous time systems. International Journal of Systems Science, 26(5):1249-1256.

Yang G H, Lam J, Wang J L. 1998. Reliable H_∞ control for affine nonlinear systems. IEEE Trans Automat Contr., 43: 1112-1117.

Yang G H, Wang J L, Soh Y C. 2000. Reliable LQG control with sensor failures, IEE. Proc. Control Theory Appl., 147(4): 433-439.

Yang G H, Wang J L, Soh Y C. 2001. Reliable H_∞ controller design for linear systems, Automatica, 37(4): 717-725.

Yedavalli R K. 1993. Quadratic stabilization of linear uncertain systems in convex-bounded domains. Automatica,29(2):491-493.

Yedavalli R K. 1993. Quadratic stabilization of linear uncertain systems in convex-bounded domains. Automatica,29(2):491-493.

Zhao Q, Jiang J, 1998. Reliable state feedback control system design against actuator failures, Automatica, 34(10): 1267-1272.

第 9 章　不确定 Lur'e 奇异系统的鲁棒控制

9.1　引　　言

由于奇异系统比正则系统更能精确地描述实际的动态系统，在过去的几十年里，人们对它进行了广泛的研究。奇异系统又叫绝对系统、广义状态空间系统、微分代数系统或者不完全状态系统(Dai,1989；Masubuchi et al., 1997；Newcomb et al.，1989；Shi et al.，1999)。许多基于正则系统(状态空间)的结果已经逐步扩展到奇异系统(Ye et al.，1998；Fang et. al.，1994；Xu et al.，2002)。近年来，此类问题的研究已取得了丰硕成果(Cgaoui et al.，1994；Xu et al.,2002)，然而对于具有非线性执行机构的 Lur'e 时滞奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题却鲜有涉及。

近几十年来，由于具有饱和执行器的系统经常出现在工业实际中，对这类系统的鲁棒二次镇定问题的研究已经吸引了很多学者的注意(Bernstein et al.，1995；Niculescu，1996)。执行器饱和现象的发生使得一些经典的控制器设计方法在实际中变得一筹莫展，失去了应有的控制效应。人们为此找到了很多消除饱和的方法(Shen et al.，1989；Tarbouriech et al.，1997)。Tarbouriech 等(2001)基于 Lyapunov-Krasovskii 方法和 S 过程，得出了基于几个耦合的线性矩阵不等式的控制器设计方法，但这需要参数的整定，也就是说需要事先依据经验固定一些参数，再逐步求出参数的最优解；Su 等(1999a；2001)针对一类具有饱和执行器的不确定时滞线性系统，提出了一种不需要调解参数，依赖于时滞的鲁棒二次镇定的方法。然而，具有饱和执行器的 Lur'e 时滞奇异系统的鲁棒二次镇定问题，迄今为止，还鲜有涉及。

本章首先讨论把非线性执行机构引入到不确定时滞奇异系统中，研究了一类具有参数不确定性的 Lur'e 时滞奇异系统鲁棒稳定性和鲁棒 H_∞ 状态反馈控制问题，得出了鲁棒稳定性的充分条件，它能够使系统具有正则性、无摄动性和稳定性；而且，还得出了基于线性矩阵不等式的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法。然后针对一类具有常规饱和特性的不确定 Lur'e 时滞奇异系统，基于 Lyapunov-Krasovskii 方法和 S 过程，提出了保证闭环系统正则无摄动，并且局部渐近稳定的鲁棒二次镇定控制器的设计方法，所得出的充分条件，基于消除了耦合的线性矩阵不等式，不需要参数的调节。

9.2　不确定 Lur'e 时滞奇异系统的鲁棒稳定性

9.2.1　系统描述和定义

考虑如下的不确定 Lur'e 时滞奇异系统：

$$(\Sigma):\quad E\dot{x}(t)=(A_0+\Delta A_0(x,t))x(t)+\sum_{i=1}^{k}(A_i+\Delta A_i(x,t))x(t-h(t))$$
$$+E_0 f(\sigma(t))+(B_0+\Delta B_0(x,t))w(t) \tag{9.2.1}$$
$$\sigma(t)=Cx(t),\quad x(t)=\phi(t),\quad w(t)=0$$
$$t\in[-\max(h_j(t),g_j(t)),0],\quad j=0,1,\cdots,k$$

其中，$x(t)\in R^n$ 为系统的状态向量，矩阵 $E\in R^{n\times n}$ 是奇异的，假定 $\mathrm{rank}\,E=r\leqslant n$。矩阵 C,A_0,A_i,B_0 和 E_0 是已知的具有适当维数的实常数矩阵，$\Delta A_0(\cdot)$、$\Delta A_i(\cdot)$ 和 $\Delta B_0(\cdot)$ 为实值连续矩阵函数，分别表示系统的实变参数的不确定性。非线性机构 $f(\sigma(t))$ 满足霍尔维茨条件(1.3.3)。

不确定 Lur'e 时滞奇异系统的标称自治系统可写成如下的形式：

$$E\dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{i=1}^{k}A_ix(t-h_i(t))+E_{10}f(\sigma(t)) \tag{9.2.2}$$

定义 9.2.1(Xu，2002)　(1)如果 $\det(sE-A)\neq 0$，则矩阵对 (E,A) 是正则的。

(2) 如果 $\deg(\det(sE-A))=\mathrm{rank}\,E$，则矩阵对 (E,A) 无摄动。

定义 9.2.2(Xu et al.，2002)　(1)奇异系统(9.2.2)是正则的、无摄动的，即奇异系统(9.2.2)的解在 $[0,\infty)$ 是唯一的、无摄动的，如果矩阵对 (E,A) 是正则的、无摄动的。

(2) 奇异系统(9.2.2)是稳定的，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$，对于任意的平滑初始条件 $\phi(t)$，当 $\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant 0}\|\phi(t)\|\leqslant\delta(\varepsilon)$ 时，系统(9.2.8)的解 $x(t)$ 满足 $\|x(t)\|\leqslant\varepsilon,\forall t\geqslant 0$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

定义 9.2.3　不确定 Lur'e 时滞奇异系统 Σ_Δ 是鲁棒稳定的，如果当 $u(t)\equiv 0,\ u(t-g_i(t))\equiv 0$ 且 $w(t)\in L_2^p[0,\infty)$ 时，对所有容许的不确定性，不确定 Lur'e 时滞奇异系统 Σ_Δ 是稳定的、正则的、无摄动的。

9.2.2　标称自治系统鲁棒稳定性分析

在得出主要结论之前，先看如下的引理：

引理 9.2.1(Masubuchi et al.，1997)　奇异系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{9.2.3}$$

是鲁棒稳定的，即是稳定的、正则的、无摄动的，当且仅当存在矩阵 P 满足

$$EP^{\mathrm{T}} = PE^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \quad AP^{\mathrm{T}} + PA^{\mathrm{T}} < 0 \tag{9.2.4}$$

如下的定理 9.2.1 给出了奇异系统(9.2.2)鲁棒稳定的充分条件。

定理 9.2.1　奇异系统(9.2.2)是鲁棒稳定的，如果存在对称正定阵 $Q_i > 0, i = 1, \cdots, k$ 和矩阵 P，以及标量 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_0 P^{\mathrm{T}} + PA_0^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{k} Q_i & \Omega_{12} & E_{10} & PC^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} \\ \Omega_{12}^{\mathrm{T}} & \Omega_{22} & 0 & 0 \\ E_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon^{-1} I & 0 \\ KCP^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{9.2.5}$$

$$EP^{\mathrm{T}} = PE^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{9.2.6}$$

其中

$$K = \mathrm{diag}\{k_1, \cdots, k_n\}, \quad \Omega_{12} = [A_1 P^{\mathrm{T}} \ \cdots \ A_k P^{\mathrm{T}}]$$

$$\Omega_{22} = -\mathrm{diag}\{(1 - h_1) Q_1, \cdots, (1 - h_k) Q_k\}$$

证明　由 Schur 补引理知，不等式(9.2.5)等价于 $A_0 P^{\mathrm{T}} + PA_0^{\mathrm{T}} < 0$，由引理 9.2.1 可知，矩阵对 (E, A) 是正则的、无摄动的。而由定义 9.2.2 知，系统(9.2.2)是正则的、无摄动的。如果我们能证明系统(9.2.2)是稳定的，则定理 9.2.1 得证。

Dai(1989)指出，如果矩阵对 (E, A) 是正则的、无摄动的，则必存在两个可逆矩阵 L_1、$L_2 \in R^{n \times n}$，使得

$$\bar{E} := L_1 E L_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} := L_1 A_0 L_2 = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{9.2.7}$$

其中，$I_r \in R^{r \times r}, I_{n-r} \in R^{(n-r) \times (n-r)}, A_r \in R^{r \times r}$。根据(9.2.7)作如下变换：

$$\bar{A}_i := L_1 A_i L_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{i11} & \bar{A}_{i12} \\ \bar{A}_{i21} & \bar{A}_{i22} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \cdots, k$$

$$\bar{C} := L_2^{-1} C L_2, \quad \bar{K} := K L_2, \quad \bar{E}_{10} := L_1 E_{10} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix} \tag{9.2.8}$$

$$\bar{P} := L_1 E L_2^{-\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_i := L_1 Q_i L_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{i11} & \bar{Q}_{i12} \\ \bar{Q}_{i12}^{T} & \bar{Q}_{i22} \end{bmatrix}$$

把式(9.2.5)左乘 $\mathrm{diag}\{L_1, \mathrm{diag}\{L_1 \cdots L_1\}, I, I\}$，右乘 $\mathrm{diag}\{L_1^{\mathrm{T}}, \mathrm{diag}\{L_1^{\mathrm{T}} \cdots L_1^{\mathrm{T}}\}, I, I\}$，我们有

$$\bar{E}\bar{P}^{\mathrm{T}} = \bar{P}\bar{E}^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{9.2.9}$$

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \bar{A}\bar{P}^{\mathrm{T}} + \bar{P}\bar{A}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{k} \bar{Q}_i & \bar{\Omega}_{12} & \bar{E}_{10} & \bar{P}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{\Omega}_{22} & 0 & 0 \\ \bar{E}_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon^{-1} I & 0 \\ \bar{K}\bar{C}\bar{P}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{9.2.10}$$

其中，$\bar{\Omega}_{12} = [\bar{A}_1 \bar{P}^{\mathrm{T}} \ \cdots \ \bar{A}_k \bar{P}^{\mathrm{T}}], \bar{\Omega}_{22} = -\mathrm{diag}\left\{(1-h_1)\bar{Q}_1, \cdots, (1-h_k)\bar{Q}_k\right\}$。

把式(9.2.7)中的 $\bar{E}$，式(9.2.8)中的 $\bar{P}$ 代入式(9.2.9)中，得出 $\bar{P}_{11} = \bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \bar{P}_{21} = 0$，即

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \tag{9.2.11}$$

把式(9.2.7)、(9.2.8)和(9.2.11)代入式(9.2.10)中，通过 Schur 补引理，我们能得到如下的不等式(9.2.12)满足：

$$\begin{bmatrix} A_r\bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}A_r^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{k}\bar{Q}_{i11} & \bar{P}_{12} + \sum_{i=1}^{k}\bar{Q}_{i12} & \bar{A}_{111}\bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} + \bar{A}_{112}\bar{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{A}_{112}\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \bar{A}_{k11}\bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} + \bar{A}_{k12}\bar{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{A}_{k12}\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}} \\ \bar{P}_{12}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{k}\bar{Q}_{i12}^{\mathrm{T}} & \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{k}\bar{Q}_{i22} & \bar{A}_{121}\bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} + \bar{A}_{122}\bar{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{A}_{122}\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \bar{A}_{k21}\bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} + \bar{A}_{k22}\bar{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{A}_{k22}\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}} \\ \bar{P}_{11}\bar{A}_{111}^{\mathrm{T}} + \bar{P}_{12}\bar{A}_{112}^{\mathrm{T}} & \bar{P}_{11}\bar{A}_{121}^{\mathrm{T}} + \bar{P}_{12}\bar{A}_{122}^{\mathrm{T}} & -(1-h_1)\bar{Q}_{111} & -(1-h_1)\bar{Q}_{112} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{P}_{22}\bar{A}_{112}^{\mathrm{T}} & \bar{P}_{22}\bar{A}_{122}^{\mathrm{T}} & -(1-h_1)\bar{Q}_{112}^{\mathrm{T}} & -(1-h_1)\bar{Q}_{122} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \bar{P}_{11}\bar{A}_{k11}^{\mathrm{T}} + \bar{P}_{12}\bar{A}_{k12}^{\mathrm{T}} & \bar{P}_{11}\bar{A}_{k21}^{\mathrm{T}} + \bar{P}_{12}\bar{A}_{k22}^{\mathrm{T}} & \vdots & \vdots & \cdots & -(1-h_k)\bar{Q}_{k11} & -(1-h_k)\bar{Q}_{k12} \\ \bar{P}_{22}\bar{A}_{k12}^{\mathrm{T}} & \bar{P}_{22}\bar{A}_{k22}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \cdots & -(1-h_k)\bar{Q}_{k12}^{\mathrm{T}} & -(1-h_k)\bar{Q}_{k22} \end{bmatrix} < 0 \tag{9.2.12}$$

则通过式(9.2.12)，我们能很容易地推出如下的不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{22}+\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{k}\bar{Q}_{i22} & \bar{A}_{i22}\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}} \\ \bar{P}_{22}\bar{A}_{i22}^{\mathrm{T}} & -(1-h_i)\bar{Q}_{i22} \end{bmatrix}<0, \quad i=1,\cdots,k \tag{9.2.13}$$

根据式(9.2.13)和 Schur 补引理，选择合适的矩阵 $\bar{Q}_i$，我们有

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{22}+\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}}+(1-h_i)\bar{Q}_{i22} & \bar{A}_{i22}\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}} \\ \bar{P}_{22}\bar{A}_{i22}^{\mathrm{T}} & -(1-h_i)\bar{Q}_{i22} \end{bmatrix}<0, \quad i=1,\cdots,k \tag{9.2.14}$$

既然 $\bar{Q}_{i22}>0$，并且不等式(9.2.14)成立，则 $\bar{P}_{22}+\bar{P}_{22}^{\mathrm{T}}<0$，所以矩阵 $\bar{P}_{22}$ 是可逆的；而且，不等式(9.2.14)成立等价于如下的不等式成立：

$$\begin{bmatrix} -\tilde{Q}_{i22} & \bar{A}_{i22}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}^{-1} \\ \bar{P}_{22}^{-\mathrm{T}}\bar{A}_{i22} & \bar{P}_{22}^{-1}+\bar{P}_{22}^{-\mathrm{T}}+\tilde{Q}_{i22} \end{bmatrix}<0, \quad i=1,\cdots,k \tag{9.2.15}$$

其中

$$\tilde{Q}_{i22}=(1-h_i)\bar{P}_{22}^{-1}\bar{Q}_{i22}\bar{P}_{22}^{-\mathrm{T}}>0$$

由引理 2.2.7，我们可得

$$\bar{A}_{i22}^{\mathrm{T}}\tilde{Q}_{i22}\bar{A}_{i22}-\tilde{Q}_{i22}<0 \tag{9.2.16}$$

因此

$$\rho(\bar{A}_{i22})<1, \quad i=1,\cdots,k \tag{9.2.17}$$

其中 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵 · 的谱半径。

对时滞奇异系统(9.2.2)中的状态做线性变换，令

$$\xi(t)=L_2^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{bmatrix} \tag{9.2.18}$$

其中，$\xi_1(t)\in R^r,\xi_2(t)\in R^{n-r}$。把式(9.2.8)、(9.2.9)、(9.2.18)带入奇异系统(9.2.2)中，得

$$\dot{\xi}_1(t)=A_r\xi_1(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i11}\xi_1(t-h_i(t))+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i12}\xi_2(t-h_i(t))+\bar{E}_1f(\eta(t)) \tag{9.2.19}$$

$$0=\xi_2(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i21}\xi_1(t-h_i(t))+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i22}\xi_2(t-h_i(t))+\bar{E}_2f(\eta(t)) \tag{9.2.20}$$

其中，$\eta(t)=\bar{C}\xi(t)$. 定义 Lyapunov 函数

$$
\begin{aligned}
V(\xi(t)) &= \xi_1^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}_{11}^{-1}\xi_1(t)+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_i(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}_i\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(s)\mathrm{d}s \\
&= \xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}\xi(t)+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_i(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}_i\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(s)\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{9.2.21}
$$

由式(8.2.9)可得

$$
f^{\mathrm{T}}f \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{K}\bar{C}\xi(t) \tag{9.2.22}
$$

由式(9.2.19)、(9.2.20)及不等式(9.2.22)可得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(\xi(t)) \leqslant & [\xi^{\mathrm{T}}(t),\xi^{\mathrm{T}}(t-h_1(t)),\cdots,\xi^{\mathrm{T}}(t-h_k(t))]\bar{P}^{-1}\bar{\Omega}'\bar{P}^{-\mathrm{T}} \\
& \times[\xi^{\mathrm{T}}(t),\xi^{\mathrm{T}}(t-h_1(t)),\cdots,\xi^{\mathrm{T}}(t-h_k(t))]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{9.2.23}
$$

其中

$$
\bar{\Omega}'=\begin{bmatrix} \bar{A}\bar{P}^{\mathrm{T}}+\overline{PA}^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{k}\bar{Q}_i+\varepsilon\bar{E}_{10}\bar{E}_{10}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\bar{P}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{K}\bar{C}\bar{P}^{\mathrm{T}} & \bar{\Omega}_{12} \\ \bar{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{\Omega}_{22} \end{bmatrix}
$$

根据 Schur 补引理 $\bar{\Omega}<0$ 等价于 $\bar{\Omega}'<0$，即 $\dot{V}(\xi(t))<0$，并且

$$
\lambda_1\|\xi_1(t)\|^2-V(\xi_0)\leqslant-\lambda_2\int_0^t\|\xi(t)\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant-\lambda_2\int_0^t\|\xi_1(t)\|^2\,\mathrm{d}t<0 \tag{9.2.24}
$$

其中，$\lambda_1=\lambda_{\min}(\bar{P}_{11}^{-1})>0,\ \lambda_2=-\lambda_{\max}[\bar{P}^{-1}\bar{\Omega}'\bar{P}^{-\mathrm{T}}]>0$. 由不等式(9.2.24)可得

$$
\|\xi_1(t)\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_1}V(\xi_0)>0,\quad \int_0^t\|\xi_1(t)\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\lambda_2}V(\xi_0)>0 \tag{9.2.25}
$$

从式(9.2.22)可以看出

$$
\|\bar{E}_2f(\eta)\|^2\leqslant\|\bar{E}_2\bar{K}\bar{C}\xi(t)\|^2\Rightarrow\|\bar{E}_2f(\eta)\|\leqslant\sqrt{\lambda_3}(\|\xi_1(t)\|+\|\xi_2(t)\|) \tag{9.2.26}
$$

其中，$\lambda_3=\lambda_{\max}[\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{E}_2^{\mathrm{T}}\bar{E}_2\bar{K}\bar{C}]\geqslant0$。而由式(9.2.20)可得

$$
\|\xi_2(t)\|-\left\|\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i22}\xi_2(t-h_i(t))\right\|-\left\|\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i21}\xi_1(t-h_i(t))\right\|-\|\bar{E}_2f(\eta(t))\|\leqslant0 \tag{9.2.27}
$$

考虑不等式(9.2.17)和不等式(9.2.27)，由$\|\xi_1(t)\|$的有界性，可以得出$\|\xi_2(t)\|$有界；同样，考虑式(9.2.19)和式(9.2.26)可以得出$\|\dot{\xi}_1(t)\|$有界，由引理 1.4.1.1，可得$\|\xi_1(t)\|^2$是一致连续的，而由式(9.2.27)可知$\int_0^t\|\xi_1(t)\|^2\mathrm{d}t$有界，由引理 1.4.1.2，即得$\lim\limits_{t\to\infty}\|\xi_1(t)\|=0$。

在式(9.2.22)两边同时取范数，考虑$\dot{f}(\eta(t))$的有界性，可得$\|\dot{\xi}_2(t)\|$有界。使用同样的方法，可证$\lim\limits_{t\to\infty}\|\xi_2(t)\|=0$。由定义 9.2.2 可知，系统(9.2.19)和(9.2.20)是稳定的。综上所述，定理 9.2.1 得证。

9.2.3 不确定 Lur'e 时滞奇异系统鲁棒稳定性分析

不失一般性，令$k=1$，系统(9.2.1)变成如下的形式：

$$
\begin{aligned}
(\Sigma):\quad & E\dot{x}(t)=(A_0+\Delta A_0(x,t))x(t)+(A_1+\Delta A_1(x,t))x(t-h(t))\\
&\qquad +E_0f(\sigma(t))+(B_0+\Delta B_0(x,t))w(t)\\
&\sigma(t)=Cx(t),\quad x(t)=\phi(t),\quad w(t)=0\\
&\qquad t\in[-\max(h_j(t),g_j(t)),0],\quad j=0,1,\cdots,k
\end{aligned}
\tag{9.2.28}
$$

假定不确定性描述如下：

$$
\begin{bmatrix}\Delta A_0(\cdot) & \Delta A_1(\cdot) & \Delta B_0(\cdot)\end{bmatrix}=G_1F(x,t)\begin{bmatrix}H_1 & H_2 & H_3\end{bmatrix}
\tag{9.2.29}
$$

本节的主要结论描述如下。

定理 9.2.2　考虑不确定 Lur'e 时滞奇异系统Σ，如果存在一个矩阵P，一个正定矩阵$Q>0$，标量$\varepsilon>0,\theta>0$，以至于如下的条件满足：

$$
EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0
\tag{9.2.30a}
$$

$$
M=\begin{bmatrix}
M_{11} & B_0P^{\mathrm{T}} & A_1P^{\mathrm{T}} & E_0 & PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} & PH_1^{\mathrm{T}} & G_1\\
PB_0^{\mathrm{T}} & -\gamma^2I & 0 & 0 & 0 & PH_3^{\mathrm{T}} & 0\\
PA_1^{\mathrm{T}} & 0 & -(1-d)Q & 0 & 0 & PH_2^{\mathrm{T}} & 0\\
E_0^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1}I & 0 & 0 & 0\\
KCP^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I & 0 & 0\\
H_1P^{\mathrm{T}} & H_3P^{\mathrm{T}} & H_2P^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\theta I & 0\\
G_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta^{-1}I
\end{bmatrix}<0
\tag{9.2.30b}
$$

$$
\lambda_1+h\lambda_2\leqslant\sigma\gamma^2/v
\tag{9.2.30c}
$$

其中，$M_{11}=A_0P^{\mathrm{T}}+PA_0^{\mathrm{T}}+Q$, $K=\mathrm{diag}\{k_1,\cdots,k_n\}$，且 $\beta>0$ 是下面方程的单根：

$$\beta(\lambda_1+\lambda_2 h\mathrm{e}^{\beta h})=\lambda_{\tilde{M}} \tag{9.2.31}$$

这里

$$\lambda_1=\lambda_{\max}(P^{-1}E),\quad \lambda_2=\lambda_{\max}(P^{-1}QP^{-\mathrm{T}}),\quad \lambda_{\tilde{M}}=\lambda_{\max}(P^{-1}\tilde{M}_1P^{-\mathrm{T}})$$

$$\tilde{M}_1=\begin{bmatrix} M_{11}+\varepsilon E_0E_0^{\mathrm{T}}+\theta G_1G_1^{\mathrm{T}} \\ +\theta^{-1}PH_1^{\mathrm{T}}H_1P^{\mathrm{T}} & A_1P^{\mathrm{T}}+\theta^{-1}PH_1^{\mathrm{T}}H_2P^{\mathrm{T}} \\ PA_1^{\mathrm{T}}+\theta^{-1}PH_2^{\mathrm{T}}H_1P^{\mathrm{T}} & -(1-d)Q+\theta^{-1}PH_2^{\mathrm{T}}H_2P^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

证明　首先我们证明系统Σ($w(t)=0$)的鲁棒稳定性，此时系统Σ变为

$$E\dot{x}(t)=A_{0\Delta}x(t)+A_{1\Delta}x(t-h_i(t))+E_0f(\sigma(t)) \tag{9.2.32}$$

其中，$A_{0\Delta}=A_0+\Delta A_0(\cdot)$，$A_{1\Delta}=A_1+\Delta A_1(\cdot)$。

类似于定理 9.2.1 的证明，我们能很容易地得出奇异系统(9.2.4)是正则无摄动的。则必定存在两个正交矩阵 L_1 和 $L_2\in R^{n\times n}$，使得

$$\bar{E}:=L_1EL_2=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \bar{A}:=L_1A_0L_2=\begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix} \tag{9.2.33}$$

根据式(9.2.5)，做如下的变换：

$$\begin{aligned} &\bar{A}_1:=L_1A_1L_2=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \bar{B}_0:=L_1B_0L_2,\quad \bar{E}_0:=L_1E_0=\begin{bmatrix}\bar{E}_{01}\\ \bar{E}_{02}\end{bmatrix}\\ &\bar{C}:=L_2^{-1}CL_2,\quad \bar{K}:=KL_2,\quad \bar{H}_1:=H_1L_2,\quad \bar{H}_2:=H_2L_2,\quad \bar{H}_3:=H_3L_2\\ &\bar{G}_1:=L_1G_1,\quad \bar{P}:=L_1PL_2^{-\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & \bar{P}_{12}\\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22}\end{bmatrix},\quad \bar{Q}:=L_1QL_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12}\\ \bar{Q}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{Q}_{22}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{9.2.34}$$

在不等式(9.2.30a)和(9.2.30b)两边分别左乘 L_1 和 $\mathrm{diag}\{L_1,L_1,L_1,I,I,I,I,I\}$，右乘 L_1^{T} 和 $\mathrm{diag}\{L_1^{\mathrm{T}},L_1^{\mathrm{T}},L_1^{\mathrm{T}},I,I,I,I,I\}$ 得到如下的矩阵不等式：

$$\bar{E}\bar{P}^{\mathrm{T}}=\bar{P}\bar{E}^{\mathrm{T}}\geqslant 0 \tag{9.2.35}$$

$$\bar{M}=\begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{B}_0\bar{P}^{\mathrm{T}} & \bar{A}_1\bar{P}^{\mathrm{T}} & \bar{E}_0 & \bar{P}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}} & \bar{P}\bar{L}^{\mathrm{T}} & \bar{P}\bar{H}_1^{\mathrm{T}} & \bar{G}_1 \\ \bar{P}\bar{B}_0^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{P}\bar{H}_3^{\mathrm{T}} & 0 \\ \bar{P}\bar{A}_1^{\mathrm{T}} & 0 & (1-d)\bar{Q} & 0 & 0 & 0 & \bar{P}\bar{H}_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ \bar{E}_0^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{K}\bar{C}\bar{P}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ \bar{L}\bar{P}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ \bar{H}_1\bar{P}^{\mathrm{T}} & \bar{H}_3\bar{P}^{\mathrm{T}} & \bar{H}_2\bar{P}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\theta I & 0 \\ \bar{G}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta^{-1}I \end{bmatrix}<0 \quad (9.2.36)$$

通过定理 9.2.1 的证明过程可知矩阵 $\bar{P}$ 具有如下的形式：

$$\bar{P}=\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix},\quad \bar{P}_{11}=\bar{P}_{11}^{\mathrm{T}}>0 \quad (9.2.37)$$

做线性变换

$$\xi(t)=L_2^{-1}x(t)=\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}$$

其中，$\xi_1(t)\in R^r,\xi_2(t)\in R^{n-r}$。把式(9.2.33)和(9.2.34)代入奇异系统(9.2.32)中，得到

$$\bar{E}\dot{\xi}(t)=\bar{A}_{0\Delta}\xi(t)+\bar{A}_{1\Delta}\xi(t-h(t))+\bar{E}_0 f(\eta(t)) \quad (9.2.38)$$

其中 $\eta(t)=\bar{C}\xi(t)$。奇异时滞系统(9.2.38)能被分解成

$$\dot{\xi}_1(t)=A_{r\Delta}\xi_1(t)+\bar{A}_{11\Delta}\xi_1(t-h(t))+\bar{A}_{12\Delta}\xi_2(t-h(t))+\bar{E}_{01}f(\eta(t)) \quad (9.2.39)$$

$$0=\xi_2(t)+\bar{A}_{21\Delta}\xi_1(t-h(t))+\bar{A}_{22\Delta}\xi_2(t-h(t))+\bar{E}_{02}f(\eta(t)) \quad (9.2.40)$$

定义

$$\begin{aligned} V(\xi(t))&=\xi_1^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}_{11}^{-1}\xi_1(t)+\int_{t-h(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(s)\mathrm{d}s \\ &=\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}\xi(t)+\int_{t-h(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(s)\mathrm{d}s \end{aligned} \quad (9.2.41)$$

则 $V(\xi(t))$ 沿着系统(9.2.38)的解的时间导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(\xi(t)) &= \xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}\dot{\xi}(t) + \dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t) + \xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t) \\ &\quad -(1-\dot{h}_i(t))\xi^{\mathrm{T}}(t-h(t))\bar{P}^{-1}\bar{Q}_i\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t-h(t)) \\ &\leqslant 2\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}[\bar{A}_{0\Delta}\xi(t) + \bar{A}_{1\Delta}\xi(t-h(t)) + \bar{E}_0 f(\eta(t))] \\ &\quad + \xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t) - (1-d)\xi^{\mathrm{T}}(t-h(t))\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t-h(t))\end{aligned} \tag{9.2.42}$$

根据引理 2.2.5 和不等式(8.2.9)得，存在一个正标量 ε 使得如下的不等式成立：

$$2\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}_0 f(\eta(t)) \leqslant \varepsilon\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}_0\bar{E}_0^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t) + \varepsilon^{-1}\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{K}\bar{C}\xi(t) \tag{9.2.43}$$

因此，由以上的分析可知

$$\dot{V}(\xi(t)) \leqslant \tilde{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{M}_{1\Delta}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\tilde{\xi}(t) \tag{9.2.44}$$

其中，$\tilde{\xi}(t) = [\xi^{\mathrm{T}}(t) \quad \xi^{\mathrm{T}}(t-h(t))]$，且

$$\bar{M}_{1\Delta} = \begin{bmatrix} [\bar{A}_{0\Delta}\bar{P}^{\mathrm{T}} + \overline{PA}_{0\Delta}^{\mathrm{T}} + \bar{Q} + \varepsilon\bar{E}_0\bar{E}_0^{\mathrm{T}} \\ \quad + \varepsilon^{-1}\overline{PC}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\overline{KCP}^{\mathrm{T}}] & \bar{A}_{1\Delta}\bar{P}^{\mathrm{T}} \\ \overline{PA}_{1\Delta}^{\mathrm{T}} & (1-d)\bar{Q} \end{bmatrix}$$

考虑不确定性的描述式(9.2.29)，矩阵 $\bar{M}_{1\Delta}$ 能被重写成

$$\bar{M}_{1\Delta} = \bar{M}_1 + \Omega_1 F(x,t)\Omega_2 + (\Omega_1 F(x,t)\Omega_2)^{\mathrm{T}} \tag{9.2.45}$$

其中，矩阵 $\bar{M}_{1\Delta}$ 中不含不确定性矩阵 $\Delta\bar{A}_0(\cdot)$ 和 $\Delta\bar{A}_1(\cdot)$ 即为矩阵 $\bar{M}_1$，且

$$\Omega_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\bar{G}_1^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix}\bar{H}_1\bar{P}^{\mathrm{T}} & \bar{H}_2\bar{P}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

另一方面，由 Schur 补引理和不等式(9.2.36)可得

$$\bar{M}_1 + \theta\Omega_1\Omega_1^{\mathrm{T}} + \theta^{-1}\Omega_2^{\mathrm{T}}\Omega_2 < 0$$

因此，由引理 2.2.4 和式(9.2.45)可得

$$\bar{M}_{1\Delta} \leqslant \bar{M}_1 + \theta\Omega_1\Omega_1^{\mathrm{T}} + \theta^{-1}\Omega_2^{\mathrm{T}}\Omega_2 < 0 \tag{9.2.46}$$

则通过不等式(9.2.44)和不等式(9.2.46)可以看出，对所有 $\xi(t) \neq 0$，有

$$\dot{V}(\xi(t)) \leqslant -\lambda_{\bar{M}}\left\|\tilde{\xi}(t)\right\|^2 \leqslant -\lambda_{\bar{M}}\left\|\xi(t)\right\|^2 \tag{9.2.47}$$

其中，$\lambda_{\bar{M}} = -\lambda_{\max}[\bar{P}^{-1}(\bar{M}_1 + \theta\Omega_1\Omega_1^{\mathrm{T}} + \theta^{-1}\Omega_2^{\mathrm{T}}\Omega_2)\bar{P}^{-\mathrm{T}}]$。因此，对任意标量 $\beta > 0$，

有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\beta t}V(\xi(t))}{\mathrm{d}t}&=\mathrm{e}^{\beta t}[\beta V(\xi(t))+\dot{V}(\xi(t))]\\&\leqslant \mathrm{e}^{\beta t}[(\bar{\lambda}_1\beta-\lambda_{\bar{\bar{M}}})\|\xi(t)\|^2+\bar{\lambda}_2\beta\int_{t-h(t)}^{t}\|\xi(s)\|^2\,\mathrm{d}s]\end{aligned}\tag{9.2.48}$$

其中，$\bar{\lambda}_1=\lambda_{\max}(\bar{P}^{-1}\bar{E})$，$\bar{\lambda}_2=\lambda_{\max}(\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}})$。既然矩阵 L_1 和 L_2 是正交阵，从方程(9.2.31)可以推出 $\beta>0$ 也是如下方程的单根：

$$\beta(\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_2 h\mathrm{e}^{\beta h})=\lambda_{\bar{\bar{M}}}\tag{9.2.49}$$

在不等式(9.2.48)两边对时间 t 从 0 到 t 积分，并且考虑式(9.2.49)和如下的不等式(Mao，2002)：

$$\int_0^t \mathrm{e}^{\beta t}\left(\int_{t-h(t)}^{t}\|\xi(s)\|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\leqslant h\mathrm{e}^{\beta h}\int_0^t \mathrm{e}^{\beta s}\|\xi(s)\|^2\,\mathrm{d}s$$

得到

$$V(\xi(t))\leqslant \mathrm{e}^{-\beta t}V(\bar{\phi}(t))$$

其中，$\bar{\phi}(t)=L_2^{-1}\phi(t)$。因此

$$\|\xi_1(t)\|^2\leqslant(\mathrm{e}^{-\beta t}/\lambda_{\min}(\bar{P}_{11}^{-1}))V(\bar{\phi}(t))$$

这暗示了

$$\lim_{t\to\infty}\|\xi_1(t)\|=0\tag{9.2.50}$$

而且，由不等式(9.2.47)，我们有

$$\lambda_{\min}(\bar{P}_{11}^{-1})\|\xi_1(t)\|^2-V(\bar{\phi}(t))\leqslant\int_0^t\dot{V}(\xi(s))\mathrm{d}s\leqslant-\lambda_{\bar{\bar{M}}}\int_0^t\|\xi_2(s)\|^2\mathrm{d}s$$

因此

$$\int_0^t\|\xi_2(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant(1/\lambda_{\bar{\bar{M}}})V(\bar{\phi}(t))\tag{9.2.51}$$

由式(9.2.40)，我们还可以得到

$$\int_0^t\|\bar{E}_{02}f(\eta)\|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^t\sqrt{\lambda_3}(\|\xi_1(t)\|+\|\xi_2(t)\|)\mathrm{d}t$$

其中，$\lambda_3=\lambda_{\max}[\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{E}_{02}^{\mathrm{T}}\bar{E}_{02}\bar{K}\bar{C}]\geqslant 0$。

根据以上的分析，考虑著名的 Barbalat's 引理(Krstic et al.，1998)，最终我们能容易地推导得到

$$\lim_{t\to\infty}\bar{E}_{02}f(\eta)=0 \tag{9.2.52}$$

对式(9.2.40)两边同时求极限，考虑式(9.2.50)和式(9.2.52)，得

$$\lim_{t\to\infty}\|\xi_2(t)\|=0 \tag{9.2.53}$$

综上所述，系统Σ是鲁棒稳定的。

9.3　不确定 Lur'e 时滞奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制

9.3.1　问题描述与定义

考虑如下的具有未知时滞项和参数不确定性的连续 Lur'e 奇异系统：

$$\begin{aligned}E\dot{x}(t)=&(A_0+\Delta A_0(x,t))x(t)+\sum_{i=1}^{k}(A_i+\Delta A_i(x,t))x(t-h_i(t))+E_{10}f(\sigma(t))\\&+(B_{10}+\Delta B_{10}(x,t))w(t)+(B_{20}+\Delta B_{20}(x,t))u(t)\\&+\sum_{i=1}^{k}(B_{2i}+\Delta B_{2i}(x,t))u(t-g_i(t))\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

$$\begin{aligned}z(t)=&(C_{10}+\Delta C_{10}(x,t))x(t)+\sum_{i=1}^{k}(C_{1i}+\Delta C_{1i}(x,t))x(t-h_i(t))\\&+(D_{10}+\Delta D_{10}(x,t))w(t)+(D_{20}+\Delta D_{20}(x,t))u(t)\\&+\sum_{i=1}^{k}(D_{2i}+\Delta D_{2i}(x,t))u(t-g_i(t))\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

$$\begin{gathered}\sigma(t)=Cx(t),\quad x(t)=\phi(t),\quad w(t)=0,\quad u(t)=0\\ t\in[-\max(h_j(t),g_j(t)),0],\quad j=0,1,\cdots,k\end{gathered} \tag{9.3.3}$$

把此被控系统记为 Σ_Δ，其中 $x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$ 和 $z(t)\in R^q$ 分别是系统的状态、控制输入和被控输出向量；$w(t)\in L_2^p[0,\infty)$ 为平方可积的扰动输入向量；矩阵 $E\in R^{n\times n}$ 是奇异的，假定 $\operatorname{rank}E=r\leqslant n$。$C,A_i,B_{2i},C_{1i},D_{2i},E_{10},B_{10},D_{10}(i=0,1,2,\cdots,k)$ 为已知的具有适当位数的矩阵。$\Delta A_0(\cdot)$、$\Delta A_i(\cdot)$、$\Delta B_{10}(\cdot)$、$\Delta B_{20}(\cdot)$、$\Delta B_{2i}(\cdot)$，$\Delta C_{1i}(\cdot)$ 和 $\Delta D_{2i}(\cdot)$ 为实值连续矩阵函数，分别表示系统的实变参数的不确定性，假定不确定性可以描述成如下的形式：

$$\begin{bmatrix} \Delta A_0 & \Delta A_1 & \cdots & \Delta A_k & \Delta B_{10} & \Delta B_{20} & \Delta B_{21} & \cdots & \Delta B_{2k} \\ \Delta C_{10} & \Delta C_{11} & \cdots & \Delta C_{1k} & \Delta D_{10} & \Delta D_{20} & \Delta D_{21} & \cdots & \Delta D_{2k} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} F(x(t),t)\begin{bmatrix} H_{11} & H_{121} & \cdots & H_{12k} & H_{13} & H_{14} & H_{151} & \cdots & H_{15k} \end{bmatrix} \tag{9.3.4}$$

其中，$H_{11},H_{121},\cdots,H_{12k},H_{13},H_{14},H_{151},\cdots,H_{15k},G_{11},G_{21}$ 为已知的具有适当维数的常矩阵。$F(x(t),t)$ 表示未知的实值时变矩阵，其元素 Lebesgue 可测且有界，满足

$$F^{\mathrm{T}}(x(t),t)F(x(t),t) \leqslant I, \quad \forall t \tag{9.3.5}$$

$h_i(t),g_i(t)$ 是未知有界的时滞项，满足

$$0 \leqslant h_i(t),g_i(t) \leqslant h,g \leqslant \tau; \quad \dot{h}_i(t),\dot{g}_i(t) \leqslant h_i,g_i < 1 \tag{9.3.6}$$

令 $\tau = \max(h_i,g_i), i=1,2,\cdots,k$，当 $t\in[-\tau,0]$ 时，$x(t)=\phi(t), w(t)=0, u(t)=0$，$\phi(t)$ 表示系统(9.2.1)解的初值函数，为一连续光滑的向量函数。

$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)^{\mathrm{T}}$，$f(\sigma)=(f(\sigma_1),f(\sigma_2),\cdots,f(\sigma_n))^{\mathrm{T}}$。每一个非线性机构的导数范数有界且位于有限霍尔维茨角域内，即对于 $j=1,2,\cdots,n$

$$\begin{aligned} f_j(\cdot)\in K_j[0,k_j] = \{ f_j(\sigma_j) \mid & f_j(0)=0, \|\dot{f}_j(\sigma_j)\| \leqslant \alpha, \\ & 0 < \sigma_j f_j(\sigma_j) \leqslant k_j\sigma_j^2 \ (\sigma_j \neq 0)\} \end{aligned} \tag{9.3.7}$$

定义 9.3.1　对于不确定 Lur'e 时滞奇异系统 Σ_Δ，设计一个状态反馈控制器 Υ: $u(t)=\Lambda x(t), \Lambda\in R^{m\times n}$，当 $w(t)\in L_2^p[0,\infty)$ 时，闭环系统是定义 9.2.3 所定义的鲁棒稳定的，且对于给定的标量 $\gamma>0$，对所有容许的不确定性，满足

$$\sup_{0\neq w\in L_2[0,\infty)}\left(\frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}\right) < \gamma \tag{9.3.8}$$

则称系统 Σ_Δ 具有鲁棒 H_∞ 性能，控制器 Υ 称为 H_∞ 控制器。

如果 $w(t)$ 的维数 $p<n$，用 $\hat{w}^{\mathrm{T}}(t)=\begin{bmatrix} w^{\mathrm{T}}(t) & \underbrace{0\cdots0}_{n-p} \end{bmatrix}$ 代替 $w^{\mathrm{T}}(t)$，这样 $w(t)\in R^n$，相应的系数矩阵进行同样的扩维运算，使得 $B_{10},D_{10},\Delta B_{10},\Delta D_{10}\in R^{n\times n}$。通过这样的变换之后，对于不确定 Lur'e 时滞奇异系统 Σ_Δ，在线性状态反馈控制律 Υ: $u(t)=\Lambda x(t), \Lambda\in R^{m\times n}$ 的作用下，闭环系统写成如下的形式：

$$E\dot{x}(t)=(A_{0\Delta}+B_{20\Delta}\varLambda)x(t)+\sum_{i=1}^{k}A_{i\Delta}x(t-h_i(t))+\sum_{i=1}^{k}B_{2i\Delta}\varLambda x(t-g_i(t))$$
$$+E_{10}f(\sigma(t))+B_{10\Delta}w(t) \tag{9.3.9}$$

$$z(t)=(C_{10\Delta}+D_{20\Delta}\varLambda)x(t)+\sum_{i=1}^{k}C_{1i\Delta}x(t-h_i(t))+D_{10\Delta}w(t)$$
$$+\sum_{i=1}^{k}D_{2i\Delta}\varLambda x(t-g_i(t)) \tag{9.3.10}$$

9.3.2 主要结果

首先给出如下的推论：

推论 9.3.1 不确定奇异系统(9.3.9)($w(t)=0$) 是鲁棒二次可镇定的，如果存在一个线性的状态反馈控制律 $\varUpsilon$: $u(t)=\varLambda x(t),\ \varLambda\in R^{m\times n}$，正定对称矩阵 $Q_{1i}>0$, $Q_{2i}>0, i=1,\cdots,k$，矩阵 P 和标量 $\varepsilon>0$ 以至于如下的矩阵不等式成立：

$$EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0$$

$$\varOmega_{\Delta}=\begin{bmatrix} \begin{array}{l}(A_{0\Delta}+B_{20\Delta}\varLambda)P^{\mathrm{T}}+P(A_{0\Delta}+B_{20\Delta}\varLambda)^{\mathrm{T}}\\ \quad+\sum_{i=1}^{k}Q_{1i}+\sum_{i=1}^{k}Q_{2i}+\varepsilon E_{10}E_{10}^{\mathrm{T}}\end{array} & \varOmega_{12\Delta} & \varOmega_{13\Delta} & PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} \\ \varOmega_{12\Delta}^{\mathrm{T}} & \varOmega_{22}' & 0 & 0 \\ \varOmega_{13\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & \varOmega_{33} & 0 \\ KCP^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0 \tag{9.3.11}$$

其中，$[\cdot]_{\Delta}=[\cdot]+\Delta[\cdot]$（$[\cdot]$ 表示矩阵），且

$$\varOmega_{12\Delta}=[A_{1\Delta}P^{\mathrm{T}}\ \ A_{2\Delta}P^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ A_{k\Delta}P^{\mathrm{T}}],\quad \varOmega_{13\Delta}=[B_{21\Delta}\varLambda P^{\mathrm{T}}\ \ B_{22\Delta}\varLambda P^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ B_{2k\Delta}\varLambda P^{\mathrm{T}}]$$

$$\varOmega_{22}'=-\mathrm{diag}\{(1-h_1)Q_{11},(1-h_2)Q_{12},\cdots,(1-h_k)Q_{1k}\}$$

$$\varOmega_{33}=-\mathrm{diag}\{(1-g_1)Q_{21},(1-g_2)Q_{22},\cdots,(1-g_k)Q_{2k}\}$$

证明 选择如下的 Lyapunov 函数 $V(\xi(t))$：

$$V(\xi(t))=\xi_1^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}_{11}^{-1}\xi_1(t)+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_i(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}_{1i}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(s)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-g_i(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}_{2i}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(s)\mathrm{d}s$$

其他的步骤与定理9.2.1一样，本文在此略去。

定理 9.3.1 闭环系统(9.3.9)和(9.3.10)是鲁棒稳定的，且在零初值条件下($x(t)=\phi(t)=0,t\in[-\tau,0]$)，闭环系统输出满足鲁棒$H_\infty$范数约束条件(9.3.8)，如果对于给定的$\gamma>0$，存在对称正定阵$Q_{1i}>0,Q_{2i}>0,i=1,\cdots,k$和矩阵$P$，以及标量$\varepsilon>0$满足

$$EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0$$

$$\Omega'_{\Delta}=\begin{bmatrix}\Omega'_{11\Delta} & \Omega_{12\Delta} & \Omega_{13\Delta} & B_{10\Delta}P^{\mathrm{T}} & \Omega_{15\Delta} & PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\\ \Omega_{12\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega'_{22} & 0 & 0 & \Omega_{25\Delta} & 0\\ \Omega_{13\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & \Omega_{33} & 0 & \Omega_{35\Delta} & 0\\ PB_{10\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I & \Omega_{45\Delta} & 0\\ \Omega_{15\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{25\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{35\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{45\Delta}^{\mathrm{T}} & -I & 0\\ KCP^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0 \tag{9.3.12}$$

其中

$$\Omega'_{11\Delta}=(A_{0\Delta}+B_{20\Delta}\Lambda)P^{\mathrm{T}}+P(A_{0\Delta}+B_{20\Delta}\Lambda)^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{k}Q_{1i}+\sum_{i=1}^{k}Q_{2i}+\varepsilon E_{10}E_{10}^{\mathrm{T}}$$

$$\Omega_{15\Delta}^{\mathrm{T}}=(C_{10\Delta}+D_{20\Delta}\Lambda)P^{\mathrm{T}},\quad \Omega_{25\Delta}^{\mathrm{T}}=[C_{11\Delta}P^{\mathrm{T}}\ \ C_{12\Delta}P^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ C_{1k\Delta}P^{\mathrm{T}}]$$

$$\Omega_{35\Delta}^{\mathrm{T}}=[D_{21\Delta}\Lambda P^{\mathrm{T}}\ \ D_{22\Delta}\Lambda P^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ D_{2k\Delta}\Lambda P^{\mathrm{T}}],\quad \Omega_{45\Delta}^{\mathrm{T}}=D_{10\Delta}P^{\mathrm{T}}$$

证明 由Schur补引理，不等式(9.3.11)成立等价于$\Omega_{\Delta}<0$，由推论9.3.1可知，闭环系统(9.3.9)和(9.3.10)是鲁棒稳定的。引入定理9.2.2的证明过程中的相同的线性变换，则系统(9.3.9)和(9.3.10)变成如下的形式：

$$\bar{E}\dot{\xi}(t)=(\bar{A}_{0\Delta}+\bar{B}_{20\Delta}\bar{\Lambda})\xi(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i\Delta}\xi(t-h_i(t))+\bar{E}_{10}f(\eta(t))$$
$$+\bar{B}_{10\Delta}w(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{B}_{2i\Delta}\bar{\Lambda}\xi(t-g_i(t)) \tag{9.3.13}$$

$$z(t)=(\bar{C}_{10\Delta}+\bar{D}_{20\Delta}\bar{\Lambda})\xi(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{C}_{1i\Delta}\xi(t-h_i(t))+\bar{D}_{10\Delta}w(t)$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\bar{D}_{2i\Delta}\bar{\Lambda}\xi(t-g_i(t)) \tag{9.3.14}$$

其中

$$\bar{A}_{i\Delta}:=L_1A_{i\Delta}L_2,\quad i=0,1,\cdots,k,\quad \bar{B}_{10\Delta}:=L_1B_{10\Delta},\quad \bar{B}_{2i\Delta}:=L_1B_{2i\Delta},\quad i=0,1,\cdots,k$$

$$\bar{D}_{10\Delta}:=D_{10\Delta},\quad \bar{C}_{1i\Delta}:=C_{1i\Delta}L_2,\quad i=0,1,\cdots,k,\quad \bar{D}_{2i\Delta}:=D_{2i\Delta},\quad i=0,1,\cdots,k,\quad \bar{\Lambda}:=\Lambda L_2$$

系统(9.3.9)和(9.3.10)与系统(9.3.13)和(9.3.14)是等价的。定义 Lyapunov 函数 $V(\xi(t))$ 为

$$V(\xi(t))=\xi_1^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}_{11}^{-1}\xi_1(t)+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_i(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}_{1i}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(s)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-g_i(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}_{2i}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(s)\mathrm{d}s$$

由 Schur 补引理，当不等式(9.3.12)成立时，如下的矩阵不等式也成立：

$$\begin{bmatrix}\Omega'_{1\Delta}+\varepsilon^{-1}PK^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CKP^{\mathrm{T}} & \Omega_{12\Delta} & \Omega_{13\Delta} & B_{10\Delta}P^{\mathrm{T}}\\ \Omega_{12\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega'_{22} & 0 & 0\\ \Omega_{13\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & \Omega_{33} & 0\\ PB_{10\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Omega_{15\Delta}\\ \Omega_{25\Delta}\\ \Omega_{35\Delta}\\ \Omega_{45\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_{15\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{25\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{35\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{45\Delta}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}<0$$

则对于任意非零的向量 $\xi(t),\xi(t-h_1(t)),\cdots,\xi(t-h_k(t)),\xi(t-g_1(t)),\cdots,\xi(t-g_k(t))$ 和 $w(t)$，如下的不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \xi(t-H)\\ \xi(t-G)\\ w(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-1}\begin{bmatrix}\Omega'_{1\Delta}+\varepsilon^{-1}PK^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CKP^{\mathrm{T}} & \Omega_{12\Delta} & \Omega_{13\Delta} & B_{10\Delta}P^{\mathrm{T}}\\ \Omega_{12\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega'_{22} & 0 & 0\\ \Omega_{13\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & \Omega_{33} & 0\\ PB_{10\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2I\end{bmatrix}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \xi(t-H)\\ \xi(t-G)\\ w(t)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \xi(t-H)\\ \xi(t-G)\\ w(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-1}\begin{bmatrix}\Omega_{15\Delta}\\ \Omega_{25\Delta}\\ \Omega_{35\Delta}\\ \Omega_{45\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_{15\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{25\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{35\Delta}^{\mathrm{T}} & \Omega_{45\Delta}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \xi(t-H)\\ \xi(t-G)\\ w(t)\end{bmatrix}<0$$

其中

$$\xi^{\mathrm{T}}(t-H)=[\xi^{\mathrm{T}}(t-h_1(t)),\cdots,\xi^{\mathrm{T}}(t-h_k(t))]$$
$$\xi^{\mathrm{T}}(t-G)=[\xi^{\mathrm{T}}(t-g_1(t)),\cdots,\xi^{\mathrm{T}}(t-g_k(t))]$$

考虑以上的描述，对 $V(\xi(t))$ 沿着(9.3.13)和(9.3.14)的解求导数，由引理 1.4.2.1 及不等式(9.2.42)可得

$$\dot{V}(\xi(t),w(t))+z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)<0 \tag{9.3.15}$$

由于闭环系统(9.3.13)和(9.3.14)是鲁棒稳定的，则我们能得到对任意非零的 $w(t)\in L_2[0,\infty)$ 有 $\xi(t)\in L_2[0,\infty)$ 且 $\xi(\infty)=0$。在不等式(9.3.15)两边同时积分，考虑在零初始条件下，$V(\xi(0),w(0))=0,V(\xi(+\infty),w(+\infty))\geqslant 0$，则我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)]\mathrm{d}t\\ \leqslant&\int_0^{+\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)+V(\xi(+\infty),w(+\infty))-V(\xi(0),w(0))]\mathrm{d}t\\ =&\int_0^{+\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)+\dot{V}(\xi(t),w(t))]\mathrm{d}t<0\end{aligned}$$

由定义 9.3.1 可知，定理 9.3.1 得证。

定理 9.3.2　闭环系统(9.3.1)和(9.3.2)是鲁棒稳定的，且在零初值条件下($x(t)=\phi(t)=0,t\in[-\tau,0]$)，闭环系统输出满足鲁棒 H_∞ 范数约束条件(9.3.8)，如果对于给定的 $\gamma>0$，存在对称正定阵 $Q_{1i}>0,Q_{2i}>0,i=1,\cdots,k$ 和矩阵 P，以及标量 $\varepsilon>0,\theta>0$ 满足

$$EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0$$

$$\Omega''=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_{11}' & \Omega_{12} & \Omega_{13} & B_{10}P^{\mathrm{T}} & \Omega_{15} & PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\\ \Omega_{12}^{\mathrm{T}} & \Omega_{22}' & 0 & 0 & \Omega_{25} & 0\\ \Omega_{13}^{\mathrm{T}} & 0 & \Omega_{33} & 0 & \Omega_{35} & 0\\ PB_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I & \Omega_{45} & 0\\ \Omega_{15}^{\mathrm{T}} & \Omega_{25}^{\mathrm{T}} & \Omega_{35}^{\mathrm{T}} & \Omega_{45}^{\mathrm{T}} & -I & 0\\ KCP^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I\end{bmatrix} & \Omega_1\\ \Omega_1^{\mathrm{T}} & -\theta^{-1}I\end{bmatrix} & \Omega_2^{\mathrm{T}}\\ \Omega_2 & -\theta I\end{bmatrix}<0 \tag{9.3.16}$$

其中

$$\Omega_{11}' = (A_0 + B_{20}\Lambda)P^{\mathrm{T}} + P(A_0 + B_{20}\Lambda)^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{k} Q_{1i} + \sum_{i=1}^{k} Q_{2i} + \varepsilon E_{10}E_{10}^{\mathrm{T}}$$

$$\Omega_{12} = [A_1P^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad A_kP^{\mathrm{T}}], \quad \Omega_{13} = [B_{21}\Lambda P^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad B_{2k}\Lambda P^{\mathrm{T}}]$$

$$\Omega_{22}' = -\mathrm{diag}\{(1-h_1)Q_{11}, (1-h_2)Q_{12}, \cdots, (1-h_k)Q_{1k}\}$$

$$\Omega_{33} = -\mathrm{diag}\{(1-g_1)Q_{21}, (1-g_2)Q_{22}, \cdots, (1-g_k)Q_{2k}\}$$

$$\Omega_{15}^{\mathrm{T}} = (C_{10} + D_{20}\Lambda)P^{\mathrm{T}}, \quad \Omega_{25}^{\mathrm{T}} = [C_{11}P^{\mathrm{T}} \quad C_{12}P^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad C_{1k}P^{\mathrm{T}}]$$

$$\Omega_{35}^{\mathrm{T}} = [D_{21}\Lambda P^{\mathrm{T}} \quad D_{22}\Lambda P^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad D_{2k}\Lambda P^{\mathrm{T}}], \quad \Omega_{45}^{\mathrm{T}} = D_{10}P^{\mathrm{T}}$$

$$\Omega_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} G_{11}^{\mathrm{T}} & \underbrace{0 \cdots 0}_{2k} & 0 & G_{21}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_2 = \big[(H_{11} + H_{14}\Lambda)P^{\mathrm{T}} \quad H_{121}P^{\mathrm{T}}$$
$$\cdots \quad H_{12k}P^{\mathrm{T}} \quad H_{151}\Lambda P^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad H_{15k}\Lambda P^{\mathrm{T}} \quad H_{13}P^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0 \quad 0\big]$$

证明 类似于定理 9.3.1 的证明，并参考文献(Su et al., 1998; Wang et al., 1998)中的 H_∞ 控制问题的证明。

从定理 9.3.1 的证明我们可以知道，存在两个可逆矩阵 L_1、L_2，使得

$$\bar{P} = L_1 P L_2^{-\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}$$

其中，$\bar{P}_{11} = \bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \bar{P}_{12} \in R^{r\times(n-r)}, \bar{P}_{22} \in R^{(n-r)\times(n-r)}$。另一方面，为简化起见，引入矩阵 $\Phi \in R^{n\times(n-r)}$，满足 $E\Phi = 0$, $\mathrm{rank}\,\Phi = n - r$，则存在一个可逆矩阵 $\Gamma \in R^{(n-r)\times(n-r)}$ 使得

$$\Phi = L_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \Gamma$$

因此，我们有

$$P = L_1^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} L_2^{\mathrm{T}} = \left(L_1^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L_2^{-1} \right) \left(L_2 \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} L_2^{\mathrm{T}} \right)$$
$$+ \left(L_1^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \Gamma^{-\mathrm{T}} \right) ()(\Gamma^{\mathrm{T}} [0 \quad I_{n-r}] L_2^{\mathrm{T}}) = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}$$

其中，$X = L_2 \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} L_2^{\mathrm{T}} > 0, \quad Y = L_1^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \Gamma^{-\mathrm{T}}$，且

$$EP^{\mathrm{T}} = E(EX + Y\Phi^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = EXE^{\mathrm{T}} = (EX + Y\Phi^{\mathrm{T}})E^{\mathrm{T}} = PE^{\mathrm{T}} \geqslant 0$$

定义

$$\Psi = \Lambda(EX + Y\Phi^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \Lambda Z^{\mathrm{T}}(X,Y)$$

不失一般性，假定 $Z(X,Y) = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}$ 是可逆的，这时 $u(t) = \Psi Z^{-\mathrm{T}}(X,Y)x(t)$。把不等式(9.3.16)中的矩阵 P 用 $Z(X,Y)$ 代替，ΛP^{T} 用 Ψ 代替。从上面的分析及定理 9.3.2，不难得出如下的定理 9.3.3，定理 9.3.3 解决了用 LMI 技术求解 H_∞ 状态反馈控制器的问题。

定理 9.3.3 闭环系统(9.3.1)~(9.3.3)是鲁棒稳定的，且在零初值条件下($x(t) = \phi(t) = 0, t \in [-\tau, 0]$)，闭环系统输出满足鲁棒 H_∞ 范数约束条件(9.3.8)，如果对于给定的 $\gamma > 0$，存在对称正定阵 $Q_{1i} > 0, Q_{2i} > 0, i = 1,\cdots,k$ 和对称正定阵 $X > 0$，矩阵 Y, Ψ，以及标量 $\varepsilon > 0, \theta > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & B_{10}Z^{\mathrm{T}} & \Theta_{15} & ZK^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} & G_{11} & \Theta_{18} \\ \Theta_{12}^{\mathrm{T}} & \Theta_{22} & 0 & 0 & \Theta_{25} & 0 & 0 & \Theta_{28} \\ \Theta_{13}^{\mathrm{T}} & 0 & \Theta_{33} & 0 & \Theta_{35} & 0 & 0 & \Theta_{38} \\ ZB_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I & ZD_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & ZH_{13}^{\mathrm{T}} \\ \Theta_{15}^{\mathrm{T}} & \Theta_{25}^{\mathrm{T}} & \Theta_{35}^{\mathrm{T}} & D_{10}Z^{\mathrm{T}} & -I & 0 & G_{21} & 0 \\ CKZ^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ G_{11}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & G_{21}^{\mathrm{T}} & 0 & -\theta^{-1}I & 0 \\ \Theta_{18}^{\mathrm{T}} & \Theta_{28}^{\mathrm{T}} & \Theta_{38}^{\mathrm{T}} & H_{13}Z^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\theta I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.17)$$

其中，$Z = Z(X,Y) = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}$，且

$$\Theta_{11} = A_0 Z^{\mathrm{T}} + ZA_0^{\mathrm{T}} + B_{20}\Psi + \Psi^{\mathrm{T}} B_{20}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{k} Q_{1i} + \sum_{i=1}^{k} Q_{2i} + \varepsilon E_{10} E_{10}^{\mathrm{T}}$$

$$\Theta_{12} = [A_1 Z^T \ \cdots \ A_k Z^T], \quad \Theta_{13} = [B_{21}\Psi \ \cdots \ B_{2k}\Psi], \quad \Theta_{15} = ZC_{10}^{\mathrm{T}} + \Psi^{\mathrm{T}} B_{20}^{\mathrm{T}}$$

$$\Theta_{18} = ZH_{11}^{\mathrm{T}} + \Psi^{\mathrm{T}} H_{14}^{\mathrm{T}}, \qquad \Theta_{22} = -\mathrm{diag}\{(1-h_1)Q_{11},\cdots,(1-h_k)Q_{1k}\}$$

$$\Theta_{33} = -\mathrm{diag}\{(1-g_1)Q_{21},\cdots,(1-g_k)Q_{2k}\}, \quad \Theta_{25}^{\mathrm{T}} = [C_{11}Z^{\mathrm{T}} \ \cdots \ C_{1k}Z^{\mathrm{T}}]$$

$$\Theta_{35}^{\mathrm{T}} = [D_{21}\Psi \ \cdots \ D_{2k}\Psi], \quad \Theta_{28}^{\mathrm{T}} = [H_{121}Z^{\mathrm{T}} \ \cdots \ H_{12k}Z^{\mathrm{T}}], \quad \Theta_{38}^{\mathrm{T}} = [H_{151}\Psi \ \cdots \ H_{15k}\Psi]$$

此时鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器为 $\Upsilon : u(t) = \Psi Z^{-\mathrm{T}}(X,Y)x(t)$。

9.3.3 数值例子

例 9.3.1 考虑 Lur'e 奇异时滞系统(9.2.1)和(9.2.2)(假定 $k = 1, n = 3$)，其参数

矩阵如下所式：

$$E=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad A_0=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}1.5&0.5&0.5\\1.5&-1&0\\1&0.5&1\end{bmatrix},\quad E_{10}=\begin{bmatrix}0.5&0.4\\-0.3&0.3\\0.4&0.2\end{bmatrix}$$

$$B_{10}=\begin{bmatrix}1\\-1.5\\0.5\end{bmatrix},\quad B_{20}=\begin{bmatrix}0.7&1\\-0.5&0.8\\-1&0.7\end{bmatrix},\quad B_{21}=\begin{bmatrix}0.1&-0.2\\0&0.4\\0.3&-0.5\end{bmatrix},\quad C_{10}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\3&1.5&1\\3&0&0\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix}0.1&0.1&0.2\\0.2&0&0.1\\-0.1&0.1&0\end{bmatrix},\quad D_{10}=\begin{bmatrix}0.3\\0.5\\0\end{bmatrix},\quad D_{20}=\begin{bmatrix}-0.1&0.3\\0&0.2\\0.5&0\end{bmatrix},\quad D_{21}=\begin{bmatrix}0&0.1\\0&0.1\\0&0.3\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&0.8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0.6&0\\2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix},\quad G_{11}=\begin{bmatrix}0.4\\0.3\\-0.1\end{bmatrix},\quad G_{21}=\begin{bmatrix}-0.1\\0.2\\-0.2\end{bmatrix}$$

$$H_{11}=\begin{bmatrix}0.4&0.4&0.3\end{bmatrix},\quad H_{12}=\begin{bmatrix}-0.2&0.1&0.4\end{bmatrix}$$
$$H_{13}=0.2,\quad H_{14}=\begin{bmatrix}0.1&0.3\end{bmatrix},\quad H_{15}=\begin{bmatrix}-0.3&-0.1\end{bmatrix}$$

由于 $p=1<n=3$，因此必须进行扩维运算，把矩阵 B_{10},D_{10} 和 H_{13} 变成满维的矩阵，即

$$B_{10}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1.5&0&0\\0.5&0&0\end{bmatrix},\quad D_{10}=\begin{bmatrix}0.3&0&0\\0.5&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad H_{13}=\begin{bmatrix}0.2&0&0\end{bmatrix}$$

从 $E\Phi=0$，选择 $\Phi=\begin{bmatrix}-1&2&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。假定 $\gamma=1.2$，通过定理 9.3.3，使用 Matlab/LMI toolbox，LMI (9.3.17) 可行解存在的时滞区间为 $0<h_1\leqslant 0.62,\ 0<g_1\leqslant 0.53$。当 $h_1=0.62, g_1=0.53$ 时，相应的解为

$$X=\begin{bmatrix}29.2851&-58.5704&-29.3048\\-58.5704&117.1774&58.5361\\-29.3048&58.5361&29.3536\end{bmatrix},\quad Q_1=\begin{bmatrix}0.1398&-0.0162&-0.2070\\-0.0162&0.0315&0.0961\\-0.2070&0.0961&0.0514\end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.2741 & 0.0154 & -0.2612 \\ 0.0154 & 0.0720 & 0.1405 \\ -0.2612 & 0.1405 & 0.1332 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -0.0081 \\ 0.0230 \\ -0.0072 \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -0.6296 & 0.0278 & 0.4294 \\ -0.3384 & -0.0652 & 0.0846 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -31.3218 & 4.1465 & 5.7195 \\ -3.9777 & 3.1948 & 4.5591 \end{bmatrix}$$

因此鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律为

$$u(t) = \begin{bmatrix} -31.3218 & 4.1465 & 5.7195 \\ -3.9777 & 3.1948 & 4.5591 \end{bmatrix} x(t)$$

9.4　具有饱和执行器的不确定 Lur'e 时滞奇异系统的鲁棒二次镇定

9.4.1　系统地描述和定义

考虑如下的具有饱和执行器的不确定 Lur'e 时滞奇异系统：

$$\begin{aligned}
(\Sigma):\ E\dot{x}(t) &= (A_0 + \Delta A_0(x,t))x(t) + \sum_{i=1}^{k}(A_i + \Delta A_i(x,t))x(t - h_i(t)) \\
&\quad + E_{10} f(\sigma(t)) + B_{10} w(t) + (B_{20} + \Delta B_{20}(x,t))u'(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}(B_{2i} + \Delta B_{2i}(x,t))u'(t - g_i(t)) \\
u'(t) &= \mathrm{Sat}(u(t)) \\
\mathrm{Sat}(u(t)) &= [\mathrm{Sat}(u_1(t))\ \ \mathrm{Sat}(u_2(t))\ \ \cdots\ \ \mathrm{Sat}(u_m(t))] \\
x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \\
\sigma(t) &= Cx(t)
\end{aligned} \tag{9.4.1}$$

其中，$x(t) \in R^n$ 为系统的状态向量，$u(t) \in R^m$ 是到执行器的控制输入向量，$u'(t) \in R^m$ 是到对象的控制输入向量，$w(t) \in R^p$ 是属于 $L_2[0,\infty)$ 的扰动输入向量，矩阵 $E \in R^{n\times n}$ 是奇异的，假定 $\mathrm{rank}\,E = r \leqslant n$。矩阵 $A_0, A_i, E_{10}, B_{10}, B_{20}$ 和 B_{2i} 是已知的具有适当维数的实常数矩阵，矩阵 $\Delta A_0(\cdot), \Delta A_i(\cdot), \Delta B_{20}(\cdot)$ 和 $\Delta B_{2i}(\cdot)$ 是范数有界的时变矩阵，代表参数的不确定性，具有如下的形式：

$$\begin{bmatrix} \Delta A_0(\cdot) & \Delta A_i(\cdot) & \Delta B_{20}(\cdot) & \Delta B_{2i}(\cdot) \end{bmatrix} = GF(x,t)\begin{bmatrix} H_1 & H_{2i} & H_3 & H_{4i} \end{bmatrix} \tag{9.4.2}$$

其中，G、H_1、H_{2i}、H_3 和 H_{4i} 是已知的具有适当维数的实常矩阵，不确定矩阵 $F(x(t),t)$ 其元素 Lebesgue 可测，满足

$$F^{\mathrm{T}}(x(t),t)F(x(t),t) \leqslant I \tag{9.4.3}$$

假定控制输入向量具有执行器约束，即 $u(t) \in U \subset R^m$，且

$$U = \left\{ u(t) \in R^m; -u_{0(i)} \leqslant u_{(i)}(t) \leqslant u_{0(i)}, u_{0(i)} > 0, i = 1, \cdots, m \right\} \tag{9.4.4}$$

饱和执行器具有常规饱和特性，描述如下：

$$\mathrm{Sat}(u_{(i)}(t)) = \begin{cases} u_{0(i)}, & u_{(i)}(t) > u_{0(i)} \\ u_{(i)}(t), & -u_{0(i)} \leqslant u_{(i)}(t) \leqslant u_{0(i)} \\ -u_{0(i)}, & u_{(i)}(t) < -u_{0(i)} \end{cases} \tag{9.4.5}$$

时滞界限与非线性项与式(9.3.6)及式(9.3.7)描述的一样。

系统(9.4.1)的标称系统写成如下的形式：

$$E\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{k} A_i x(t - h_i(t)) + E_{10} f(\sigma(t)) \tag{9.4.6}$$

使用 Leibniz-Newton 公式(Tarbouriech et al.，2001)，奇异系统(9.4.6)能被写成如下的形式：

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) = {} & (A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i)x(t) + E_{10} f(\sigma(t)) - \sum_{i=1}^{k} A_i \int_{-h_i(t)}^{0} [A_0 x(t+\theta) \\ & + \sum_{i=1}^{k} A_i x(t - h_i(t) + \theta) + E_{10} f(\sigma(t+\theta))] \mathrm{d}\theta \\ x(t) = {} & \phi(t), \quad t \in [-2\tau, 0] \end{aligned} \tag{9.4.7}$$

引理 9.4.1(Hale，1993)　奇异系统(9.4.6)是局部渐近稳定的，如果存在一个正定对称矩阵 P，正标量 π_1、π_2、π_3、v 和 γ，对任意的初始条件 $\phi(t) \in C_\tau^v$，奇异系统的解始终在集合 $\Omega(P,E,\gamma) = \left\{ x(t) \in R^n \middle| x^{\mathrm{T}}(t) P^{-1} E x(t) < \gamma^{-1}, \gamma > 0 \right\}$ 内；而且对一个满足 $\pi_1 \|x(t)\|^2 \leqslant V(x(t),t) \leqslant \pi_2 \|x(t)\|^2$ 连续的函数 $V(x(t),t): R^n \times R^+ \to R$，如果 $\dot{V}(x(t),t) \leqslant -\pi_3 \|x(t)\|^2$，$V(x(t),t) \leqslant V(\phi(0),0)$。

9.4.2　标称系统的鲁棒局部稳定性分析

定理 9.4.1　如果存在正定对称矩阵 $Q,Q_{1i},Q_{2i},Q_{3i},i=1,\cdots,k$，矩阵 P，标量 ε,γ 和 τ 满足

$$EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0 \tag{9.4.8a}$$

$$\begin{bmatrix} Q & P^{\mathrm{T}} \\ P & I \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{9.4.8b}$$

$$M=\begin{bmatrix} W & \tau N_1 & \tau N_2 & \tau N_3 \\ \tau N_1^{\mathrm{T}} & \tau\Omega_1 & 0 & 0 \\ \tau N_2^{\mathrm{T}} & 0 & \tau\Omega_2 & 0 \\ \tau N_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \tau\Omega_3 \end{bmatrix}<0 \tag{9.4.8c}$$

其中

$$W=(A_0+\sum_{i=1}^{k}A_i)P^{\mathrm{T}}+P(A_0+\sum_{i=1}^{k}A_i)^{\mathrm{T}}+\tau\sum_{i=1}^{k}A_i(Q_{1i}+Q_{2i}+Q_{3i})A_i^{\mathrm{T}}+\varepsilon E_{10}E_{10}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KCP^{\mathrm{T}}$$

$$K=\mathrm{diag}\{k_1,\cdots,k_n\},\quad N_1=[PA_0^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ PA_0^{\mathrm{T}}],\quad N_2=[PA_1^{\mathrm{T}}\ \ PA_2^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ PA_k^{\mathrm{T}}]$$

$$N_3=[PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}}\ \ PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}}],\quad \Omega_1=-\mathrm{diag}\{Q_{11},Q_{12},\cdots,Q_{1k}\}$$

$$\Omega_2=-\mathrm{diag}\{Q_{21},Q_{22},\cdots,Q_{2k}\},\quad \Omega_3=-\mathrm{diag}\{Q_{31},Q_{32},\cdots,Q_{3k}\}$$

则标称系统(9.4.6)的解对任意的初始条件集合 $\Phi_0=\{\phi(t)\|\phi(t)\|^2\leqslant\delta\}$，其中

$$\delta=\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\gamma\pi_2}$$

$$\pi_2=\lambda_{\max}(EP^{\mathrm{T}})+\frac{k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[PA_0^{\mathrm{T}}Q_{1i}^{-1}A_0P^{\mathrm{T}}]+\frac{3k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[PA_i^{\mathrm{T}}Q_{2i}^{-1}A_iP^{\mathrm{T}}]$$
$$+\frac{k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}}Q_{3i}^{-1}E_{10}KCP^{\mathrm{T}}])$$

是正则无摄动的、局部渐近稳定的。

证明　类似于定理 9.2.1 的证明，我们能很容易地得出奇异系统(9.4.6)是正则无摄动的。则必定存在两个可逆矩阵 L_1 和 $L_2\in R^{n\times n}$，使得

$$\bar{E} := L_1 E L_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} := L_1 (A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i) L_2 = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{9.4.9}$$

其中，$I_r \in R^{r \times r}, I_{n-r} \in R^{(n-r)\times(n-r)}$。根据式(9.4.9)做同样的变换

$$\begin{aligned} &\bar{A}_i := L_1 \begin{bmatrix} A_{ri} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} L_2, \quad \bar{C} := L_2^{-1} C L_2, \quad \bar{K} := K L_2 \\ &\bar{E}_{10} := L_1 E_{10} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{P} := L_1 P L_2^{-\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \\ &\bar{Q} := L_2^{-1} Q L_2^{-\mathrm{T}}, \quad \bar{Q}_{ji} := L_2^{-1} Q_{ji} L_2^{-\mathrm{T}}, i = 1, \cdots, k, \quad j = 1,2,3 \end{aligned} \tag{9.4.10}$$

在不等式(9.4.8a)、(9.4.8b)、(9.4.8c)两边分别左乘 L_1，$\mathrm{diag}\{L_1, I\}$ 和 $\mathrm{diag}\{L_1, I, I, I\}$，右乘 L_1^{T}，$\mathrm{diag}\{L_1^{\mathrm{T}}, I\}$ 和 $\mathrm{diag}\{L_1^{\mathrm{T}}, I, I, I\}$ 得到如下的矩阵不等式：

$$\bar{E}\bar{P}^{\mathrm{T}} = \bar{P}\bar{E}^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{9.4.11a}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{P}^{\mathrm{T}} \\ \bar{P} & I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.11b}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{W} & \tau\bar{N}_1 & \tau\bar{N}_2 & \tau\bar{N}_3 \\ \tau\bar{N}_1^{\mathrm{T}} & \tau\Omega_1 & 0 & 0 \\ \tau\bar{N}_2^{\mathrm{T}} & 0 & \tau\Omega_2 & 0 \\ \tau\bar{N}_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \tau\Omega_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{9.4.11c}$$

其中

$$\bar{W} = \bar{A}\bar{P}^{\mathrm{T}} + \bar{P}\bar{A} + \tau\sum_{i=1}^{k} \bar{A}_i (\bar{Q}_{1i} + \bar{Q}_{2i} + \bar{Q}_{3i}) \bar{A}_i^{\mathrm{T}} + \varepsilon \bar{E}_{10} \bar{E}_{10}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1} \bar{C}^{\mathrm{T}} \bar{K}^{\mathrm{T}} \bar{K} \bar{C}$$

通过定理 9.2.1 的证明过程可知矩阵 $\bar{P}$ 具有如下的形式：

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_{11} = \bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} > 0 \tag{9.4.12}$$

做线性变换

$$\xi(t) = L_2^{-1} x(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}$$

其中，$\xi_1(t)\in R^r,\xi_2(t)\in R^{n-r}$。把式(9.4.9)和(9.4.10)代人奇异系统(9.4.6)中，得到

$$\bar{E}\dot{\xi}(t)=\bar{A}_0\xi(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i\xi(t-h_i(t))+\bar{E}_{10}f(\bar{\sigma}(t)) \tag{9.4.13}$$

其中，$\bar{\sigma}(t)=\bar{C}\xi(t)$。奇异系统(9.4.13)也可以写成如下的形式：

$$\begin{aligned}E\dot{\xi}(t)=\bar{A}\xi(t)+\bar{E}_{10}f(\bar{\sigma}(t))-\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i\int_{-h_i(t)}^{0}\Big[&\bar{A}_0\xi(t+\theta)\\&+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i\xi(t-h_i(t)+\theta)+\bar{E}_{10}f(\bar{\sigma}(t+\theta))\Big]\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{9.4.14}$$

其中，初始条件为 $\xi(t)=\bar{\phi}(t),\ t\in[-2\tau,0]$，且 $\bar{\phi}(t)=L_2^{-1}\phi(t)$。

定义

$$V(\xi(t))=\xi_1^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}_{11}^{-1}\xi_1(t)+S(\xi(t))=\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}\xi(t)+S(\xi(t)) \tag{9.4.15}$$

其中，$S(\xi(t))$ 是待定的二次正定函数。根据不等式(9.2.22)可得

$$f^{\mathrm{T}}(\bar{\sigma}(t))f(\bar{\sigma}(t))\leqslant\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{K}\bar{C}\xi(t) \tag{9.4.16}$$

沿着式(9.4.14)的解对 $V(\xi(t))$ 求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\xi(t))&=\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}\dot{\xi}(t)+\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t)+\dot{S}(\xi(t))\\&=\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t)+\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{A}\xi(t)+2\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}_{10}f(\bar{\sigma}(t))\\&\quad+\rho_1(\xi(t))+\rho_2(\xi(t))+\rho_3(\xi(t))+\dot{S}(\xi(t))\end{aligned}$$

其中

$$\rho_1(\xi(t))=-2\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i\int_{-h_i(t)}^{0}\bar{A}_0\xi(t+\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\rho_2(\xi(t))=-2\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i\int_{-h_i(t)}^{0}\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i\xi(t-h_i(t)+\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\rho_3(\xi(t))=-2\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i\int_{-h_i(t)}^{0}\bar{E}_{10}f(\bar{\sigma}(t+\theta))\mathrm{d}\theta$$

由引理 2.2.4 及 2.2.5 可得，存在正定对称矩阵 $Q_{1i}>0,Q_{2i}>0,Q_{3i}>0,i=1,\cdots,k$ 使得

$$\rho_1(\xi(t)) \leqslant \tau\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_iQ_{1i}\bar{A}_i^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t) + \int_{-\tau}^{0}\xi^{\mathrm{T}}(t+\theta)\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_0^{\mathrm{T}}Q_{1i}^{-1}\bar{A}_0\xi(t+\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\rho_2(\xi(t)) \leqslant \tau\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_iQ_{2i}\bar{A}_i^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t) + \sum_{i=1}^{k}\int_{-\tau}^{0}\xi^{\mathrm{T}}(t-h_i(t)+\theta)\bar{A}_i^{\mathrm{T}}Q_{2i}^{-1}\bar{A}_i\xi(t-h_i(t)+\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\rho_3(\xi(t)) \leqslant \tau\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_iQ_{3i}\bar{A}_i^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t) + \int_{-\tau}^{0}f^{\mathrm{T}}(\bar{\sigma}(t+\theta))\sum_{i=1}^{k}\bar{E}_{10}^{\mathrm{T}}Q_{3i}^{-1}E_{10}f(\bar{\sigma}(t+\theta))\mathrm{d}\theta$$

定义

$$S(\xi(t)) = \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_0^{\mathrm{T}}Q_{1i}^{-1}\bar{A}_0\xi(t)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t + \int_{-\tau}^{0}\int_{t-h_i(t)+\theta}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i^{\mathrm{T}}Q_{2i}^{-1}\bar{A}_i\xi(t)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t$$
$$+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}f^{\mathrm{T}}(\bar{\sigma}(t))\sum_{i=1}^{k}\bar{E}_{10}^{\mathrm{T}}Q_{3i}^{-1}E_{10}f(\bar{\sigma}(t))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t$$

则综上所述，我们有

$$\dot{V}(\xi(t)) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\tilde{M}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\xi(t)$$

其中

$$\tilde{M} = \bar{W} + \tau N_1\Omega_1^{-1}N_1^{\mathrm{T}} + \tau N_2\Omega_2^{-1}N_2^{\mathrm{T}} + \tau N_3\Omega_3^{-1}N_3^{\mathrm{T}}$$

由 Schur 补引理可知 $\bar{M}<0$ 等价于 $\tilde{M}<0$，这暗示了 $\dot{V}(\xi(t)) \leqslant \pi_3\|\xi(t)\|^2$,($\pi_3 = -\lambda_{\max}[\bar{P}^{-1}\tilde{M}\bar{P}^{-\mathrm{T}}]$,)因此 $V(\xi(t)) \leqslant V(\xi(0))$。而且, Lyapunov 函数 $V(\xi(t))$ 还满足

$$\bar{\pi}_1\|\xi(t)\|^2 \leqslant V(\xi(t)) \leqslant \bar{\pi}_2\|\tilde{\phi}(t)\|^2$$

其中，$\tilde{\phi}(t) = \bar{P}^{-\mathrm{T}}\bar{\phi}(t)$，且

$$\bar{\pi}_1 = \frac{k\tau^2}{2}\min_i\lambda_{\min}[\bar{A}_0^{\mathrm{T}}Q_{1i}^{-1}\bar{A}_0] + \frac{3k\tau^2}{2}\min_i\lambda_{\min}[\bar{A}_i^{\mathrm{T}}Q_{2i}^{-1}\bar{A}_i] + \frac{k\tau^2}{2}\min_i\lambda_{\min}[\bar{E}_{10}^{\mathrm{T}}Q_{3i}^{-1}E_{10}]$$

$$\bar{\pi}_2 = \lambda_{\max}(\bar{E}\bar{P}^{\mathrm{T}}) + \frac{k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[\bar{P}\bar{A}_0^{\mathrm{T}}Q_{1i}^{-1}\bar{A}_0\bar{P}^{\mathrm{T}}] + \frac{3k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[\bar{P}\bar{A}_i^{\mathrm{T}}Q_{2i}^{-1}\bar{A}_i\bar{P}^{\mathrm{T}}]$$
$$+\frac{k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[\bar{P}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{E}_{10}^{\mathrm{T}}Q_{3i}^{-1}\bar{E}_{10}\bar{K}\bar{C}\bar{P}^{\mathrm{T}}]$$

通过式(9.4.11b)，我们能得到

$$\bar{\pi}_2\|\bar{\phi}(t)\|^2 \geqslant \lambda_{\min}(\bar{Q})\bar{\pi}_2\|\tilde{\phi}(t)\|^2$$

因此，对于$\bar{\phi}(t)\in\bar{\Phi}_0, t\in[-2\tau,0]$（$\bar{\Phi}_0=\{\bar{\phi}(t)\,|\,\|\bar{\phi}(t)\|^2\leqslant\bar{\delta}\}$），我们有

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}\xi(t)\leqslant V(\xi(t))\leqslant V(\xi(0))\leqslant\gamma^{-1},\quad \forall t\geqslant 0$$

通过以上的分析及引理(9.4.1)可知，奇异系统(9.4.14)是局部渐近稳定的。Tarbouriech 等(2002)指出，如果奇异系统(9.4.14)局部渐近稳定，则奇异系统(9.4.13)也是局部渐近稳定的。因此，标称系统(9.4.6)是局部渐近稳定的。综上所述，定理 9.4.1 得证。

9.4.3　无扰动条件下($w(t)=0$)的鲁棒二次局部镇定

当$w(t)=0$时，引入控制律$u(t)=2\Lambda x(t)$（$\Lambda\in R^{m\times n}$），系统(9.4.1)的闭环系统为

$$\begin{aligned}(\Sigma')\colon E\dot{x}(t)&=(A_{0\Delta}+B_{20\Delta}\Lambda)x(t)+\sum_{i=1}^{k}A_{i\Delta}x(t-h_i(t))+E_{10}f(\sigma(t))\\&\quad+\sum_{i=1}^{k}B_{2i\Delta}\Lambda x(t-g_i(t))+B_{20\Delta}\eta(t)+\sum_{i=1}^{k}B_{2i\Delta}\eta(t-g_i(t))\\x(t)&=\phi(t),\quad t\in[-\tau,0]\end{aligned}\tag{9.4.17}$$

其中

$$\eta(t)=\mathrm{Sat}(2\Lambda x(t))-\Lambda x(t),\eta(t-g_i(t))=\mathrm{Sat}(2\Lambda x(t-g_i(t))-\Lambda x(t-g_i(t))$$

明显地，对于向量$\eta(t)$，下列不等式成立：

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)\eta(t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda x(t),\quad \eta(t-g_i(t))\leqslant x^{\mathrm{T}}(t-g_i(t))\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda x(t-g_i(t))\tag{9.4.18}$$

由集合(9.4.4)可知$x(t)\in S(u_0,1_m)$，其中

$$S(u_0,1_m)=\{x(t)\in R^n\,\big|\,\{u(t)\in R^m;-u_{0(i)}\leqslant\Lambda_{(i)}x(t)\leqslant u_{0(i)},i=1,\cdots,m\}\tag{9.4.19}$$

使用与定理 9.4.1 相同的方法，并且考虑式(9.4.18)和式(9.4.19)，以及文献(Tarbouriech et al.，2002)关于广义的鲁棒局部二次镇定的思想，我们能很容易地推出如下的推论 9.4.1 成立。

推论 9.4.1　如果存在一系列正定对称矩阵$Q,Q_{1i},Q_{2i},Q_{3i},Q_{4i},Q_{5i},Q_{6i},R_{1i},R_{2i},R_{3i},R_{4i},R_{5i},R_{6i},i=1,\cdots,k$，矩阵$P$，标量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_{3i},\gamma,i=1,\cdots,k$和$\tau$以至于如下的矩阵不等式成立：

$$EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\quad M_{\Delta}<0,\quad \Xi_1\geqslant 0,\quad \Xi_2\leqslant 0$$

则对任意的初始条件集合

$$\Phi_0=\{\phi(t)|\|\phi(t)\|^2\leqslant\delta\},\qquad \delta=\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\gamma\pi_2}$$

其中

$$\begin{aligned}\pi_2=&\lambda_{\max}(EP^{\mathrm{T}})+k\tau\lambda_{\max}(P\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda P^{\mathrm{T}})+\frac{k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[P(A_{0\Delta}+B_{20\Delta}\Lambda)^{\mathrm{T}}(Q_{1i}^{-1}+R_{1i}^{-1})(A_{0\Delta}+B_{20\Delta}\Lambda)P^{\mathrm{T}}]\\&+\frac{3k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[PA_{i\Delta}^{\mathrm{T}}(Q_{2i}^{-1}+R_{2i}^{-1})A_{i\Delta}P^{\mathrm{T}}]+\frac{k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}}(Q_{3i}^{-1}+R_{3i}^{-1})E_{10}KCP^{\mathrm{T}}]\\&+\frac{3k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[P(B_{2i\Delta}\Lambda)^{\mathrm{T}}(Q_{4i}^{-1}+R_{4i}^{-1})(B_{2i\Delta}\Lambda)P^{\mathrm{T}}]+\frac{k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[P(B_{20\Delta}\Lambda)^{\mathrm{T}}(Q_{5i}^{-1}+R_{5i}^{-1})\\&\times(B_{20\Delta}\Lambda)P^{\mathrm{T}}]+\frac{3k\tau^2}{2}\max_i\lambda_{\max}[P(B_{2i\Delta}\Lambda)^{\mathrm{T}}(Q_{6i}^{-1}+R_{6i}^{-1})(B_{2i\Delta}\Lambda)P^{\mathrm{T}}]\end{aligned}$$

且

$$\Xi_1=\begin{bmatrix}P^{-1}E & \Lambda_i^{\mathrm{T}}\\ \Lambda_i & \gamma u_{0i}^2\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{9.4.20a}$$

$$\Xi_1=\begin{bmatrix}Q & P^{\mathrm{T}}\\ P & I\end{bmatrix}\leqslant 0 \tag{9.4.20b}$$

$$M_\Delta=\begin{bmatrix}W_\Delta & \tau N_{1\Delta} & \tau N_{2\Delta} & \tau N_3 & \tau N_{4\Delta} & \tau N_{5\Delta} & \tau N_{6\Delta} & \tau N_{1\Delta} & \tau N_{2\Delta} & \tau N_3 & \tau N_{4\Delta} & \tau N_{5\Delta} & \tau N_{6\Delta}\\
\tau N_{1\Delta}^{\mathrm{T}} & \tau\Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tau N_{2\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & \tau\Omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tau N_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \tau\Omega_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tau N_{4\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tau N_{5\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tau N_{6\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tau N_{1\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tau N_{2\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_2' & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tau N_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_3' & 0 & 0 & 0\\
\tau N_{4\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_4' & 0 & 0\\
\tau N_{5\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_5' & 0\\
\tau N_{6\Delta}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_6'\end{bmatrix}<0$$

(9.4.20c)

这里矩阵 N_3、Ω_1、Ω_2 和 Ω_3 与定理 9.4.1 中描述的一样，且

$$W_\Delta = (A_{0\Delta} + \sum_{i=1}^{k} A_{i\Delta} + B_{20\Delta}\Lambda + \sum_{i=1}^{k} B_{2i\Delta}\Lambda)P^{\mathrm T} + P(A_{0\Delta} + \sum_{i=1}^{k} A_{i\Delta} + B_{20\Delta}\Lambda + \sum_{i=1}^{k} B_{2i\Delta}\Lambda)^{\mathrm T} + \tau\sum_{i=1}^{k} A_{i\Delta}(Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{3i} + Q_{4i} + Q_{5i} + Q_{6i})A_{i\Delta}^{\mathrm T} + \tau\sum_{i=1}^{k} B_{2i\Delta}\Lambda(Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{3i} + Q_{4i} + Q_{5i} + Q_{6i})(B_{2i\Delta}\Lambda)^{\mathrm T} + \varepsilon_1 E_{10}E_{10}^{\mathrm T} + \varepsilon_1^{-1}PC^{\mathrm T}K^{\mathrm T}KCP^{\mathrm T} + \varepsilon_2 B_{20\Delta}B_{20\Delta}^{\mathrm T} + \varepsilon_2^{-1}P\Lambda^{\mathrm T}\Lambda P^{\mathrm T} + \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{3i}B_{2i\Delta}B_{2i\Delta}^{\mathrm T} + \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{3i}^{-1}P\Lambda^{\mathrm T}\Lambda P^{\mathrm T}$$

$$N_{1\Delta} = [P(A_{0\Delta} + B_{20\Delta}\Lambda)^{\mathrm T} \quad \cdots \quad P(A_{0\Delta} + B_{20\Delta}\Lambda)^{\mathrm T}], \quad N_{2\Delta} = [PA_{1\Delta}^{\mathrm T} \quad PA_{2\Delta}^{\mathrm T} \quad \cdots \quad PA_{k\Delta}^{\mathrm T}]$$

$$N_{4\Delta} = [P(B_{21\Delta}\Lambda)^{\mathrm T} \quad \cdots \quad P(B_{2k\Delta}\Lambda)^{\mathrm T}] = N_{6\Delta}, \quad N_{5\Delta} = [P(B_{20\Delta}\Lambda)^{\mathrm T} \quad \cdots \quad P(B_{20\Delta}\Lambda)^{\mathrm T}]$$

$$\Omega_j = -\mathrm{diag}\{Q_{j1}, Q_{j2}, \cdots, Q_{jk}\}, \quad j = 4,5,6, \quad \Omega_j' = -\mathrm{diag}\{R_{j1}, R_{j2}, \cdots, R_{jk}\}$$

不确定 Lur'e 奇异时滞系统(9.4.17)是正则无摄动的，且局部渐近稳定的。

推论 9.4.1 并不能通过 Matlab/LMI toolbox 求解出反馈增益矩阵Λ。下面我们来尝试解决这个问题。

假定存在标量 $\beta_0, \beta_i, \beta_{ji}, \delta_{ji} > 0$ 和正定矩阵 T_0, T_i, T_{ji}, P_{ji} 满足

$$B_{20}B_{20}^{\mathrm T} + B_{20}H_4^{\mathrm T}(\beta_0 I - H_3H_3^{\mathrm T})^{-1}H_3B_{20}^{\mathrm T} + \beta_0 GG^{\mathrm T} \leqslant T_0 \tag{9.4.21}$$

$$B_{2i}B_{2i}^{\mathrm T} + B_{2i}H_{4i}^{\mathrm T}(\beta_i I - H_4H_{4i}^{\mathrm T})^{-1}H_{4i}B_{2i}^{\mathrm T} + \beta_i GG^{\mathrm T} \leqslant T_i \tag{9.4.22}$$

$$A_iQ_{ji}A_i^{\mathrm T} + A_iQ_{ji}H_{2i}^{\mathrm T}(\beta_{ji}I - H_{2i}Q_{ji}H_{2i}^{\mathrm T})^{-1}H_{2i}Q_{ji}A_i^{\mathrm T} + \beta_{ik}GG^{\mathrm T} \leqslant T_{ji} \tag{9.4.23}$$

$$B_{2i}Z_{ji}B_{2i}^{\mathrm T} + B_{2i}Z_{ji}H_{4i}^{\mathrm T}(\delta_{ji}I - H_{4i}Z_{ji}H_{4i}^{\mathrm T})^{-1}H_{4i}Z_{ji}B_{2i}^{\mathrm T} + \delta_{ji}GG^{\mathrm T} \leqslant P_{ji} \tag{9.4.24}$$

其中，$Z_{ji} \geqslant \Lambda Q_{ji}\Lambda^{\mathrm T}, j = 1,\cdots,6,\ i = 1,\cdots,k$，且

$$\begin{aligned} &\beta_0 I - H_3H_3^{\mathrm T} > 0, \quad \beta_i I - H_{4i}H_{4i}^{\mathrm T} > 0, \\ &\beta_{ij}I - H_{2i}Q_{ji}H_{2i}^{\mathrm T} > 0, \quad \delta_{ji}I - H_{4i}Z_{ji}H_{4i}^{\mathrm T} > 0 \end{aligned} \tag{9.4.25}$$

使用引理 2.2.6，我们有

$$B_{20\Delta}B_{20\Delta}^{\mathrm T} \leqslant T_0, \quad B_{2i\Delta}B_{2i\Delta}^{\mathrm T} \leqslant T_i, \quad A_{i\Delta}Q_{ji}A_{i\Delta}^{\mathrm T} \leqslant T_{ji}, \quad B_{2i\Delta}\Lambda Q_{ji}\Lambda^{\mathrm T}B_{2i\Delta}^{\mathrm T} \leqslant P_{ji} \tag{9.4.26}$$

由推论 9.4.1 及式(9.4.9)以及不等式(9.4.26)，我们能推出

$$M_\Delta = \tilde M + \Theta_1 F(x(t),t)\Theta_2 + (\Theta_1 F(x(t),t)\Theta_2)^{\mathrm T} < 0 \tag{9.4.27}$$

其中，$\Theta_1 = \mathrm{diag}\{G, G, \cdots, G\}$，$\Theta_2 = \begin{bmatrix}\tilde\Theta_2 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$，且

$$\tilde{\Theta}_2^{\mathrm{T}} = [P(H_1 + \sum_i H_{2i} + H_3\Lambda + \sum_i H_{4i}\Lambda)^{\mathrm{T}},\ \tilde{\Theta}_{21}^{\mathrm{T}},\ \tilde{\Theta}_{21}^{\mathrm{T}}],$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_{21}^{\mathrm{T}} = [&P(H_1 + H_3\Lambda)^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ P(H_1 + H_3\Lambda)^{\mathrm{T}}, PH_{21}^{\mathrm{T}},\ \cdots, PH_{2k}^{\mathrm{T}},\ 0,\ \cdots, 0, P\Lambda^{\mathrm{T}}H_{41}^{\mathrm{T}},\\ &\cdots, P\Lambda^{\mathrm{T}}H_{4k}^{\mathrm{T}},\ P\Lambda^{\mathrm{T}}H_3^{\mathrm{T}},\ \cdots, P\Lambda^{\mathrm{T}}H_3^{\mathrm{T}}, P\Lambda^{\mathrm{T}}H_{41}^{\mathrm{T}},\ \cdots, P\Lambda^{\mathrm{T}}H_{4k}^{\mathrm{T}}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}' = \tilde{W}' &- \tau N_1(\Omega_1^{-1} + \Omega_1'^{-1})N_1^{\mathrm{T}} - \tau N_2(\Omega_2^{-1} + \Omega_2'^{-1})N_2^{\mathrm{T}} - \tau N_3(\Omega_3^{-1} + \Omega_3'^{-1})N_3^{\mathrm{T}}\\ &- \tau N_4(\Omega_4^{-1} + \Omega_4'^{-1})N_4^{\mathrm{T}} - \tau N_5(\Omega_5^{-1} + \Omega_5'^{-1})N_5^{\mathrm{T}} - \tau N_6(\Omega_6^{-1} + \Omega_6'^{-1})N_6^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}' = &(A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i + B_{20}\Lambda + \sum_{i=1}^{k} B_{2i}\Lambda)P^{\mathrm{T}} + P(A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i + B_{20}\Lambda + \sum_{i=1}^{k} B_{2i}\Lambda)^{\mathrm{T}}\\ &+ \varepsilon_1 E_{10}E_{10}^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1^{-1}PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KCP^{\mathrm{T}} + \tau\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{k} P_{ji} + \tau\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{k} T_{ji} + \varepsilon_2 T_0\\ &+ \varepsilon_2^{-1}P\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda P^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{3i}T_i + \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{3i}^{-1}P\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda P^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

由引理 2.2.6 及不等式(9.4.27)，我们进一步得出，存在一个标量 $\alpha > 0$ 以至于

$$\tilde{M}' + \alpha\Theta_1\Theta_1^{\mathrm{T}} + \alpha^{-1}\Theta_2^{\mathrm{T}}\Theta_2 < 0 \tag{9.4.28}$$

为简化起见,引入矩阵 $\Upsilon \in R^{n\times(n-r)}$,满足 $E\Upsilon = 0$ 且 $\operatorname{rank}\Upsilon = n - r$ 。从定理 9.2.1 得出，我们看到存在两个可逆矩阵 L_1 和 $L_2 \in R^{n\times n}$ 使得

$$P = L_1^{-1}\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & \bar{P}_{12}\\ 0 & \bar{P}_{22}\end{bmatrix}L_2^{\mathrm{T}} \stackrel{\text{def}}{=} EX + Y\Upsilon^{\mathrm{T}}$$

其中

$$X = L_2\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}L_2^{\mathrm{T}} > 0,\quad Y = L_1^{-1}\begin{bmatrix}\bar{P}_{12}\\ \bar{P}_{22}\end{bmatrix}\Gamma^{-\mathrm{T}}$$

定义

$$\Psi = \Lambda(EX + Y\Upsilon^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda Z^{\mathrm{T}}(X, Y)$$

不失一般性，假定矩阵 $Z(X,Y) = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}$ 是可逆的。否则选择一个充分小的标量 $\beta > 0$ 使得 $\hat{Z}(X,Y) = Z(X,Y) + \beta I$ ，不难看出，矩阵 $\hat{Z}(X,Y)$ 是可逆的。这样我们用 $\hat{Z}(X,Y)$ 代替 $Z(X,Y)$ 即可。

定义矩阵

$$\tilde{M}''=\begin{bmatrix} \tilde{W}'' & \tau N_1 & \tau N_2 & \tau N_3 & \tau N_4 & \tau N_5 & \tau N_6 & \tau N_1 & \tau N_2 & \tau N_3 & \tau N_4 & \tau N_5 & \tau N_6 \\ \tau N_1^{\mathrm{T}} & \tau\Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_2^{\mathrm{T}} & 0 & \tau\Omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \tau\Omega_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_4^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_5^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_6^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_3' & 0 & 0 & 0 \\ \tau N_4^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_4' & 0 & 0 \\ \tau N_5^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_5' & 0 \\ \tau N_6^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau\Omega_6' \end{bmatrix} \tag{9.4.29}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{W}''=&(A_0+\sum_{i=1}^{k}A_i)Z^{\mathrm{T}}(X,Y)+B_{20}\Psi+\sum_{i=1}^{k}B_{2i}\Psi+Z(X,Y)(A_0+\sum_{i=1}^{k}A_i)^{\mathrm{T}}\\&+(B_{20}\Psi+\sum_{i=1}^{k}B_{2i}\Psi)^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1E_{10}E_{10}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1^{-1}Z(X,Y)C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KCZ^{\mathrm{T}}(X,Y)^{\mathrm{T}}\\&+\tau\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{k}P_{ji}+\tau\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{k}T_{ji}+\varepsilon_2T_0+\varepsilon_2^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\Psi+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{3i}T_i+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{3i}^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\Psi\end{aligned}$$

$$N_1=[Z(X,Y)A_0^{\mathrm{T}}+\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}}\quad\cdots Z(X,Y)A_0^{\mathrm{T}}+\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}}\ ]$$

$$N_2=[Z(X,Y)A_1^{\mathrm{T}}\ \ Z(X,Y)A_2^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ Z(X,Y)A_k^{\mathrm{T}}]$$

$$N_3=[Z(X,Y)C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}}\ \ Z(X,Y)C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ Z(X,Y)C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}}]$$

$$N_4=[\Psi^{\mathrm{T}}B_{21}^{\mathrm{T}}\quad\cdots\Psi^{\mathrm{T}}B_{2k}^{\mathrm{T}}\ ]=N_6,\quad N_5=[\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}}\quad\cdots\ \Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}}]$$

$$\Omega_j=-\mathrm{diag}\{Q_{j1},Q_{j2},\cdots,Q_{jk}\},\quad \Omega_j'=-\mathrm{diag}\{R_{j1},R_{j2},\cdots,R_{jk}\},\quad j=1,2,\cdots,6$$

通过以上的分析，我们能很容易地得出如下的定理 9.4.2 成立。

定理 9.4.2　如果存在一系列正定对称矩阵 $X,Q_{ji},R_{ji},\ Z_{ji},\bar{Z}_{ji},T_0,\ T_i,T_{ji},P_{ji},\ V_{ji},\ Q$，矩阵 Y,Ψ，标量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_{3i},\beta_0,\beta_i,\beta_{ji},\delta_{ji},\alpha,\mu_{ji},\gamma$ 和 τ，$i=1,\cdots,k$，$j=1,\cdots,6$，满足

$$EX+Y\Upsilon^{\mathrm{T}}\geqslant\bar{Z}_{ji} \tag{9.4.30a}$$

$$\bar{Z}_{ji} \geqslant Q_{ji} \tag{9.4.30b}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ji} & \Psi \\ \Psi^{\mathrm{T}} & \bar{Z}_{ji} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{9.4.30c}$$

$$\begin{bmatrix} B_{20}B_{20}^{\mathrm{T}} + \beta_0 GG^{\mathrm{T}} - T_0 & B_{20}H_3^{\mathrm{T}} \\ H_3 B_{20}^{\mathrm{T}} & H_3 H_3^{\mathrm{T}} - \beta_0 I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.30d}$$

$$\begin{bmatrix} B_{2i}B_{2i}^{\mathrm{T}} + \beta_i GG^{\mathrm{T}} - T_i & B_{2i}H_{4i}^{\mathrm{T}} \\ H_{4i} B_{2i}^{\mathrm{T}} & H_{4i} H_{4i}^{\mathrm{T}} - \beta_i I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.30e}$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q_{ji} A_i^{\mathrm{T}} + \beta_{ji} GG^{\mathrm{T}} - T_{ji} & A_i Q_{ji} H_{2i}^{\mathrm{T}} \\ H_{2i} Q_{ji} A_i^{\mathrm{T}} & H_{2i} Q_{ji} H_{2i}^{\mathrm{T}} - \beta_{ji} I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.30f}$$

$$\begin{bmatrix} B_{2i} Z_{ji} B_{2i}^{\mathrm{T}} + \delta_{ji} GG^{\mathrm{T}} - P_{ji} & B_{2i} Z_{ji} H_{4i}^{\mathrm{T}} \\ H_{4i} Z_{ji} B_{2i}^{\mathrm{T}} & H_{4i} Z_{ji} H_{4i}^{\mathrm{T}} - \delta_{ji} I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.30g}$$

$$\begin{bmatrix} EZ^{\mathrm{T}}(X,Y) & \Psi_{(i)}^{\mathrm{T}} \\ \Psi_{(i)} & \gamma u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{9.4.30h}$$

$$\begin{bmatrix} Q & Z^{\mathrm{T}}(X,Y) \\ Z(X,Y) & I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.30i}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}'' & \Theta_1 & \Theta_2'^{\mathrm{T}} \\ \Theta_1^{\mathrm{T}} & -\alpha^{-1} I & \\ \Theta_2' & & -\alpha I \end{bmatrix} < 0 \tag{9.4.30j}$$

其中，$\Theta_2' = [\Theta_2 \;\; 0 \cdots 0]$。则对任意的初始条件集合 $\Phi_0 = \{\phi(t) \mid \|\phi(t)\|^2 \leqslant \delta\} \left(\delta = \dfrac{\lambda_{\min}(Q)}{\gamma \pi_2} \right)$，其中

$$\pi_2 = \lambda_{\max}(EZ^{\mathrm{T}}(X,Y)) + k\tau\lambda_{\max}(\Psi^{\mathrm{T}}\Psi) + \frac{k\tau^2}{2}\max_i \lambda_{\max}[V_{1i} + V_{3i} + V_{5i}]$$

$$+ \frac{3k\tau^2}{2}\max_i \lambda_{\max}[V_{2i} + V_{4i} + V_{6i}]$$

不确定 Lur'e 时滞奇异系统(9.4.1)是正则无摄动的，并且是局部二次镇定的。令 $P = Z(X,Y)$, $\Lambda P^{\mathrm{T}} = \Psi$ ，反馈增益矩阵 $\Lambda = \Psi Z^{-\mathrm{T}}(X,Y)$ 。正定对称矩阵 V_{ji} ，标量 μ_{ji} 通过下面的矩阵不等式被求解出：

$$\begin{bmatrix} (Z(X,Y)A_0^{\mathrm{T}}+\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}})(Q_{1i}^{-1}+R_{1i}^{-1})(A_0Z^{\mathrm{T}}(X,Y) & (Z(X,Y)A_0^{\mathrm{T}}+\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}})(Q_{1i}^{-1}+R_{1i}^{-1}) \\ +B_{20}\Psi)+\mu_{1i}GG^{\mathrm{T}}-V_{1i} & \times(H_1Z^{\mathrm{T}}(X,Y)+H_3\Psi) \\ [(Z(X,Y)A_0^{\mathrm{T}}+\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}})(Q_{1i}^{-1}+R_{1i}^{-1})(H_1Z^{\mathrm{T}}(X,Y) & (H_1Z^{\mathrm{T}}(X,Y)+H_3\Psi)^{\mathrm{T}}(Q_{1i}^{-1}+R_{1i}^{-1}) \\ +H_3\Psi)]^{\mathrm{T}} & \times(H_1Z^{\mathrm{T}}(X,Y)+H_3\Psi)-\mu_{1i}I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.31a}$$

$$\begin{bmatrix} Z(X,Y)A_i^{\mathrm{T}}(Q_{2i}^{-1}+R_{2i}^{-1})A_0Z^{\mathrm{T}}(X,Y)+\mu_{2i}GG^{\mathrm{T}}-V_{2i} & Z(X,Y)A_i^{\mathrm{T}}(Q_{2i}^{-1}+R_{2i}^{-1})H_{2i}Z^{\mathrm{T}}(X,Y) \\ [Z(X,Y)A_i^{\mathrm{T}}(Q_{2i}^{-1}+R_{2i}^{-1})H_{2i}Z^{\mathrm{T}}(X,Y)]^{\mathrm{T}} & Z(X,Y)H_{2i}^{\mathrm{T}}(Q_{1i}^{-1}+R_{1i}^{-1})H_{2i}Z^{\mathrm{T}}(X,Y)-\mu_{2i}I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.31b}$$

$$\begin{bmatrix} V_{3i} & C^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}E_{10}^{\mathrm{T}} \\ E_{10}KC & -(Q_{3i}^{-1}+R_{3i}^{-1})^{-1}I \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{9.4.31c}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}}(Q_{4i}^{-1}+R_{4i}^{-1})B_{2i}\Psi+\mu_{4i}GG^{\mathrm{T}}-V_{4i} & \Psi^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}}(Q_{4i}^{-1}+R_{4i}^{-1})H_{4i}\Psi \\ [\Psi^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}}(Q_{4i}^{-1}+R_{4i}^{-1})H_{4i}\Psi]^{\mathrm{T}} & (H_{4i}\Psi)^{\mathrm{T}}(Q_{4i}^{-1}+R_{4i}^{-1})(H_{4i}\Psi)-\mu_{4i}I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.31d}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}}(Q_{5i}^{-1}+R_{5i}^{-1})B_{20}\Psi+\mu_{5i}GG^{\mathrm{T}}-V_{5i} & \Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}}(Q_{5i}^{-1}+R_{5i}^{-1})H_3\Psi \\ [\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}}(Q_{5i}^{-1}+R_{5i}^{-1})H_3\Psi]^{\mathrm{T}} & (H_3\Psi)^{\mathrm{T}}(Q_{5i}^{-1}+R_{5i}^{-1})(H_3\Psi)-\mu_{5i}I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.31e}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}}(Q_{6i}^{-1}+R_{6i}^{-1})B_{2i}\Psi+\mu_{6i}GG^{\mathrm{T}}-V_{6i} & \Psi^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}}(Q_{6i}^{-1}+R_{6i}^{-1})H_{4i}\Psi \\ [\Psi^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}}(Q_{6i}^{-1}+R_{6i}^{-1})H_{4i}\Psi]^{\mathrm{T}} & (H_{4i}\Psi)^{\mathrm{T}}(Q_{6i}^{-1}+R_{6i}^{-1})(H_{4i}\Psi)-\mu_{6i}I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9.4.31f}$$

证明　如果矩阵不等式(9.4.30a)~(9.4.30c)满足，不难看出，$Z_{ji} \geqslant \Lambda Q_{ji}\Lambda^{\mathrm{T}}$ 。由 Schur 补引理和不等式(9.4.21)~(9.4.26)及简单的转换，我们能得出不等式(9.4.23d)~(9.4.23j)等价于不等式(9.4.20a)~(9.4.20c)。由推论 9.4.1，引理 2.2.6 及以上的分析可知，定理 9.4.2 中的初始条件集合等价于推论 9.4.1 中的初始条件集合。基于以上的分析可知，定理 9.4.2 得证。

注 9.4.1　定理 9.4.2 提出了求解增益矩阵Λ的方法。但由于双线性的出现(变

量 τ 和矩阵 Q_{ji} 同时作为不等式 9.4.29 中的一项)，给求解造成了一定的难度。为消除双线性的影响，我们提出了以下的算法：

(1) 给定 u_0。

(2) 初始化 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_{3i}$ 和 τ。

(3) 通过如下的最优问题，计算 $X,Y,\Psi,Q_{ji},R_{ji},Z_{ji},\bar{Z}_{ji},T_0,T_i,T_{ji},P_{ji},Q,\beta_0,\beta_i,\beta_{ji},\delta_{ji},\alpha$ 和 γ

$$\min \ \gamma$$

约束条件：LMIs (9.4.30a)~(9.4.30j)

同时通过 LMIs (9.4.31a)~(9.4.31f)求解出矩阵 V_{ji},μ_{ji} 和 δ。

(4) 固定矩阵 $X,Y,\Psi,T_0,T_i,T_{ji},P_{ji}$ 和 γ，通过如下的最优问题计算矩阵 $Q_{ji},R_{ji},Q,\beta_0,\beta_i,\beta_{ji},\delta_{ji},\alpha,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_{3i}$ 和 τ

$$\max \ \tau$$

约束条件：LMIs (9.4.30a)~(9.4.30j)

同时通过 LMIs (9.4.31a)~(9.4.31f)求解出矩阵 V_{ji},μ_{ji} 和 δ。

(5) 返回步骤(2)，直到 δ 不再有明显的改变。则 $\Lambda=\Psi Z^{-\mathrm{T}}(X,Y)$。

9.4.4 有扰动条件下($w(t)\neq 0$)的鲁棒二次局部镇定

当 $w(t)\neq 0$ 假定 $w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\leqslant w_0^{-1}$。基于文献(Tarbouriech et al., 2002)和定理 9.4.2，我们得到了如下的定理 9.4.3。这里矩阵 $\tilde{M}'',\Theta_1$ 和 Θ_2' 与定理 9.4.2 中的描述完全一样。

定理 9.4.3 对于给定的 $w_0>0$，如果存在正定对称矩阵 X、Q_{ji}、R_{ji}、Z_{ji}、$\bar{Z}_{ji}$、T_0、T_i、T_{ji}、P_{ji}、V_{ji}、Q，矩阵 Y,Ψ，标量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_{3i},\beta_0,\beta_i,\beta_{ji},\delta_{ji},\alpha,\mu_{ji},\gamma,\nu,\upsilon$ 和 τ，矩阵不等式(9.4.23a)~(9.4.23i)($i=1,\cdots,k$，$j=1,\cdots,7$)满足，且

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}''+\begin{bmatrix} \nu EZ^{\mathrm{T}}(X,Y) & 0_{n\times 12kn} \\ 0_{12kn\times n} & 0_{12kn\times 12kn} \end{bmatrix} & \Theta_1 & \Theta_2'^{\mathrm{T}} & B_{10}Z^{\mathrm{T}}(X,Y) & 0 & \\ \Theta_1^{\mathrm{T}} & -\alpha^{-1}I & & 0 & 0 & \\ \Theta_2' & & -\alpha I & 0 & 0 & \\ Z(X,Y)B_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\upsilon I & \tau N_7 & \tau N_7 \\ 0 & 0 & 0 & \tau N_7^{\mathrm{T}} & \tau\Omega_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau N_7^{\mathrm{T}} & 0 & \tau\Omega_7' \end{bmatrix}<0 \tag{9.4.32a}$$

$$-\nu w_0 + \upsilon\gamma \leqslant 0 \tag{9.4.32b}$$

$$-w_0 + \frac{\tau}{2}\upsilon\gamma \leqslant 0 \tag{9.4.32c}$$

其中 0 代表具有适当维数的零矩阵，且

$$N_7 = [Z(X,Y)B_{10}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad Z(X,Y)B_{10}^{\mathrm{T}}],\ \Omega_7 = -\mathrm{diag}\{Q_{71}, Q_{72}, \cdots, Q_{7k}\}$$
$$\Omega_7' = -\mathrm{diag}\{R_{71}, R_{72}, \cdots, R_{7k}\}$$

则 Lur'e 系统是鲁棒局部二次镇定的，反馈增益矩阵 $\Lambda = \Psi Z^{-\mathrm{T}}(X,Y)$，标量 δ 定义在集合 $\Phi_0 = \{\phi(t) \| \|\phi(t)\|^2 \leqslant \delta\}$ ($\delta = \dfrac{\lambda_{\min}(Q)(w_0 - \frac{\tau}{2}\upsilon\gamma)}{\gamma w_0 \pi_2}$，$\pi_2$ 与定理 9.4.2 中的完全一样)，闭环系统的状态始终被限制在一个椭圆球内，即

$$\Omega(P,E,\gamma) = \left\{x(t) \in R^n \,\middle|\, x^{\mathrm{T}}(t)P^{-1}Ex(t) < \gamma^{-1}, \gamma > 0\right\}$$

证明　使用 S -过程(Boyd et al., 1994)和先前得出的结果，进一步的参考文献(Tarbouriech et al., 2001)定理 2 的证明，定理 9.4.3 能很容易地被证明。限于篇幅，本文在此略去。

注 9.4.2　为了求解增益矩阵 Λ，必须稍微修改注 9.4.1 所提出的算法，把 w_0 添加到步骤(1)中，把 ν 添加到步骤(3)中。具体的算法在此略去。

9.4.5　数值仿真例子

例 9.4.1　考虑如下的具有饱和执行器(饱和标准：±1)的不确定 Lur'e 时滞奇异系统($k=1$)：

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},\ A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix},\ B_{10} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \end{bmatrix},\ B_{20} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},\ E_{10} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 0.4 & \\ & 0.6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.6 & -2 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = [0.2 \quad 0.5], H_{21} = [0.1 \quad 0.2],\quad H_3 = 0.3,\quad H_{41} = 0.2,\quad u_0 = 10,\quad w_0 = 1.2$$

取 $\Phi = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$，应用定理 9.4.3 及注 9.4.1 和 9.4.2，通过 Matlab/LMI Toolbox，我们求得，保持闭环系统是正则无摄动的，且局部渐近稳定的时滞区间为 $\tau \leqslant 0.6684$，当 $\tau = 0.5$，相应的求解结果如下：

$$X=\begin{bmatrix}6.0657 & 4.7504\\ 4.7504 & 6.0657\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-1.1697\\ -2.3394\end{bmatrix},\quad \Psi=\begin{bmatrix}-0.6008 & -1.2016\end{bmatrix}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}0.2284 & -0.2284\end{bmatrix},\quad \gamma=1.0953$$

因此，通过注 9.4.1 及 9.4.2 提出的算法及以上的结果，得到δ的最优值为 0.7849。由于在计算的过程中，不需要调解参数，使得求解的过程比文献(Niculescu，2001； Suarez et al.， 1991； Tarbouriech et al.， 2002)要简单得多。

9.5 注　记

本章重点研究了不确定时滞奇异系统的鲁棒控制问题，所得结论均以线性矩阵不等式的形式给出。

本章的主要内容来源于作者的研究成果。

参 考 文 献

Ardema M D. 1974. Singular Perturbation in Flight Mechanics. NASA, TMX-62.

Bernstein D S, Michel A N. 1995. A chronological bibliography on saturating actuators, Int. J. Robust Nonlinear Contr., 5: 375-380.

Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V. 1994. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia. SIAM.

Cgaoui B S, Feron E E, Balakrishnan V. 1994. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia. SIAM.

Cohen D S. 1974. Mathematical aspects of chemical and biochemical problems and quantum chemistry. SIAM-AMS Proc., American Math. Soc., Providence, RI., 323-335.

Dai L. 1989. Singular Control Systems. Berlin: Springer-Verlag.

Fang C H, Lee L, Chang F R. 1994. Robust control analysis and design for discrete-time singular systems, Automatica, 30: 1741-1750.

Fridman E, Shaked U. 2002. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 47: 253-279.

Hale J K. 1993. Introduction to functional differential equations. New York: Springer-Verlag .

Jamshidi M. 1972. A near-optimum controller for cold-rolling mills. Int. J. Control, 16: 1137-1154.

Jamshidi M. 1974. Three-stage near-optimum design of nonlinear control processes. Proc. IEE, 121: 886-892.

Jamshidi M. 1983. Large-Scale Systems Modeling and Control. North-Holland.

Kelley H J, Edelbaum T N. 1970. Energy climbs, energy turns and asymptotic expansions. J. Aircraft, 7: 93-95.

Kokotovic P V. 1979. Overview of multimodeling by singular perturbations. Systems Engineering for Power: Organizational Forms for Large-Scale Systems, 13-16.

Krstic M, Deng H. 1998. Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. London, U. K.: Springer-Verlag.

Lam J, Xu S, Zhang L. 2002. Robust D-stability analysis for uncertain discrete singular systems with state delay. IEEE Trans. Circuits Syst. I., 49: 551-555.

Lu R Q, Su H Y, Chu J. 2003. Robust H_∞ control for a class of uncertain singular systems with time-delays. Proceeding of 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii USA, 5585-5590.

Lu R Q, Su H Y, Chu J. 2004. New absolute stability and stabilization conditions for a class of Lur'e uncertain time-delay systems. Journal of zhejiang University (Engineering Science), 38: 129-134.

Lu R Q, Su H Y, Chu J. 2004. Robust H_∞ control for a class of uncertain nonlinear singular systems with time-delays. Acta Automatica Sinica, 30: 920-928.

Mao X. 2002. Exponential stability of stochastic delay interval systems with markovian switching. IEEE Trans. Automat. Control, 47: 1604-1612.

Masubuchi I, Kamitane Y. 1997. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach , Automatica, 33: 669-673.

Newcomb R, Dziurla B. 1989. Some circuits and systems applications of semistate theory," J. Circuits Systems Signal Process, 8(9): 253-259.

Niculescu S I. 1996. Delay Effects on Stability-a Robust Control Approach. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Niculescu S.-I. 2001. Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Shen J C, Kung F C. 1998. Stabilization of input-delay systems with saturating actuators, Int. J. Control, 44: 1667-1680.

Shi P, Dragan V. 1999. Asymptotic H_∞ control of singular perturbed systems with parametic uncertainties, IEEE Trans. Automat. Control, 44(9): 1738-1742.

Su H Y, Chu J, Wang J C, Wang S Q, Yu L. 1997. Robust stabilizing control for a class of uncertain time-delay systems with output feedback. IFAC Sym. Advanced Control in Chemical Process (ADCHEM)'97, Banff, Canada, 149-154.

Su H Y, Chu J, Wang J C. 1998. A memoryless robust stabilizing control for a class of uncertain linear time-delay systems. Int. J. Systems Sci., 29(2): 191-197.

Su H Y, Chu J. 1999a. Stabilization of a class of uncertain time-delay systems containing saturating actuators. Int. J. Robust Nonlinear Contr., 30: 1193-1203.

Su H Y, Lam J, Chu J. 1999b. Robust controller design for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. 14th IFAC'1999, Beijing, 145-150.

Su H Y, Liu F, Chu J. 2001. Robust stabilization of uncertain time-delay systems containing saturating actuators. IEE Proc. Control Theory Appl., 148: 323-328.

Suarez L E, Singh M P. 1991.Successive synthesis of substructure modes, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 58(3): 759-765.

Tarbouriech S, Garcia G. 1997. Control of Uncertain Systems with Bounded Input. Lecture Notes in Contr. and Inform. Sci., London, U. K.: Springer-verlag.

Tarbouriech S, Gomes J M, de Silva J R. 2001. Synthesis of controllers continuous-time delay systems with saturating controls via LMI's. IEE Proc. Control Theory Appl., 148: 123-130.

Tarbouriech S, Peres P L, Garcia D G, Queinnec I, 2002. Delay-dependent stabilization and disturbance tolerance for time-delay systems subject to actuator saturation, IEE Proc. Control Theory Appl., 149, 387-393.

Wang J C, Su H Y, Chu J. 1998. Robust H_∞ controller design for linear time-varying uncertain systems with delayed state and control, Proc. Amer. Conf. ,Philadelphia, USA, 2410-2414.

Xu S, Dooren P V, Lam J. 2002. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty. IEEE Trans. Automat. Control, 47: 1122-1128.

Ye H, Michel A N, Hou L. 1998. Stability analysis of systems with impulse effects, IEEE Trans. Automat. Control, 43:1719-1723.

Zhu W, Petzold L. 1997. Asymptotic stability of linear delay differential algebraic equations and numerical methods. Appl. Numer. Math., 24: 247-264.